目次

第３章　平面ベクトル

第９講　平面上のベクトル
PART1　有向線分とベクトル，ベクトルの相等
PART2　ベクトルの加法，減法，実数倍
PART3　ベクトルの演算，ベクトルの平行
PART4　ベクトルの分解

第10講　ベクトルの成分表示，ベクトルの内積
PART1　ベクトルの成分と大きさ
PART2　ベクトルの成分と平行
PART3　ベクトルの内積
PART4　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

第11講　内積の性質，位置ベクトル
PART1　内積の性質
PART2　ベクトルの大きさと内積
PART3　位置ベクトル
PART4　共線条件

第12講　ベクトルと平面図形
PART1　等式を満たす点の位置
PART2　交点の位置ベクトル（係数比較）
PART3　交点の位置ベクトル（係数の和が１）
PART4　交点の位置ベクトル（三角形の高さ）

第13講　ベクトル方程式
PART1　直線のベクトル方程式
PART2　法線ベクトルと直線のベクトル方程式
PART3　円のベクトル方程式
PART4　ベクトルの終点の存在範囲

第４章　空間ベクトル

第14講　空間ベクトル
PART1　空間の座標
PART2　空間のベクトル
PART3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示
PART4　ベクトルの内積

第15講　空間図形とベクトル
PART1　位置ベクトル
PART2　空間ベクトルの内積と大きさ
PART3　共線条件
PART4　共面条件

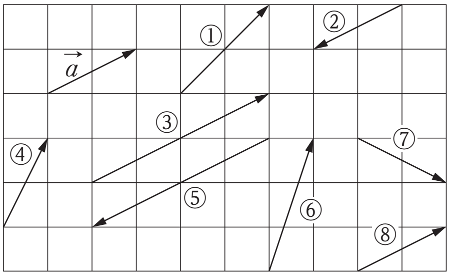
第16講　空間図形の様々な問題，座標空間における図形
PART1　直線と平面の交点
PART2　直線と平面の垂直
PART3　直線のベクトル方程式
PART4　座標空間における図形

第 9 講　平面上のベクトル

PART1　有向線分とベクトル，ベクトルの相等

例題

右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。



(1)　$\vec{a}$ と大きさが等しいベクトル

(2)　$\vec{a}$ と向きが等しいベクトル

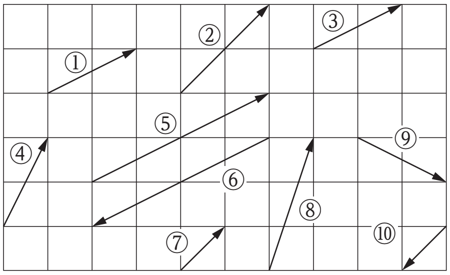
(3)　$\vec{a}$ と等しいベクトル

(4)　$\vec{a}$ の逆ベクトル

Point Pickup

練習

右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。



(1)　大きさが等しいベクトル

(2)　向きが等しいベクトル

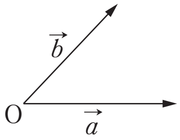
(3)　等しいベクトル

(4)　逆ベクトル

PART2　ベクトルの加法，減法，実数倍

例題

右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを，点 O を始点とする有向線分で図示せよ。



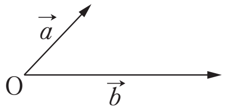
(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$2\vec{b}-\vec{a}$

Point Pickup

練習

右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを，点 O を始点とする有向線分で図示せよ。



(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$-\frac{2}{3}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

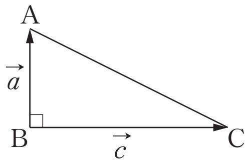
PART3　ベクトルの演算，ベクトルの平行

例題

(1)　等式 $\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$，$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(i)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

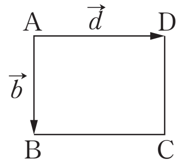
(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトル

Point Pickup

練習

(1) 等式 $5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AD}=4$ の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



(i) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と平行な単位ベクトル

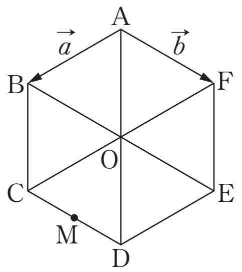
PART4　ベクトルの分解

例題

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 CF の交点を O，辺 CD の中点を M とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{FC}$　　(2)　$\overrightarrow{MC}$　　(3)　$\overrightarrow{AO}$

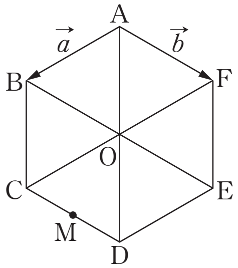
(4)　$\overrightarrow{AM}$　　(5)　$\overrightarrow{FB}$



Point Pickup

練習

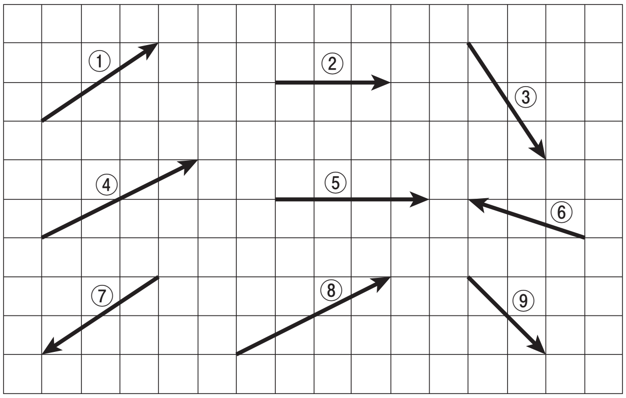
正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 CF の交点を O，辺 CD の中点を M とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MF}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$

第 9 講　PART1 確認問題

次の図のような９個のベクトル①～⑨がある。



次のようなベクトルの組を①～⑨のうちから選べ。ただし，複数ある場合は番号の小さい方から順に答えよ。

1 大きさが等しいベクトル

①と ア と イ ， ウ と エ

2 向きが等しいベクトル

②と オ ， カ と キ

3 等しいベクトル

ク と ケ

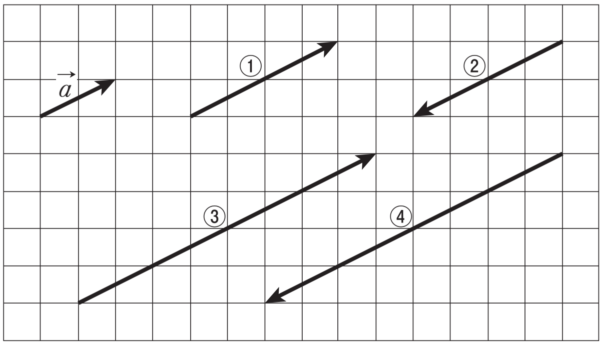
4 逆ベクトル

コ と サ

第 9 講　PART2 確認問題

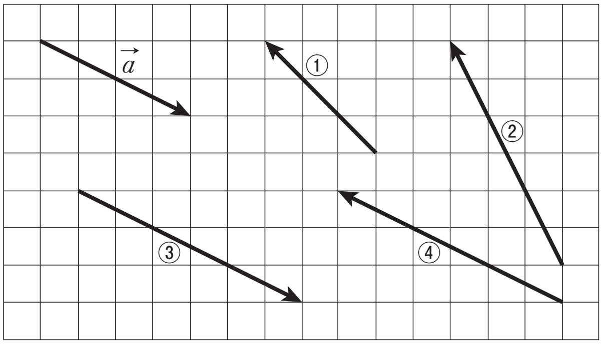
1　次の図で，$4\vec{a}$ を表すベクトルを①～④のうちから選べ。

ア



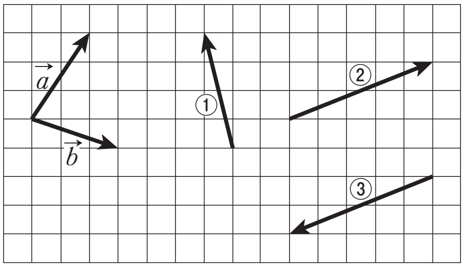
2　次の図で，$-\dfrac{3}{2}\vec{a}$ を表すベクトルを①～④のうちから選べ。

イ



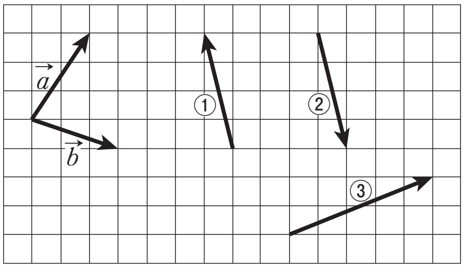
3 次の図で，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。

ウ

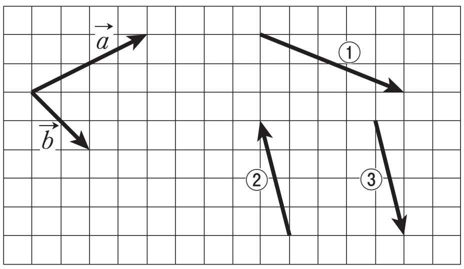


4 次の図で，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。

エ



5 次の図で，$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ を表すベクトルを①～③のうちから選べ。 オ



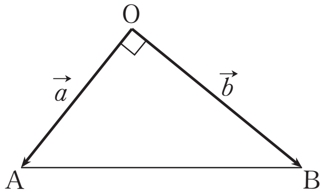
第 9 講　PART3 確認問題

1 等式 $\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，

$$\vec{x}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b},\quad \vec{y}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{a}-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{b}$$

である。

OA＝3，OB＝4，∠AOB＝90° の直角三角形 OAB がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。



2 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きの単位ベクトルは，$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{a}$ である。

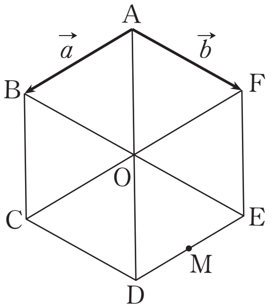
3 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行な単位ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\vec{b}$$

$$\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\vec{a}-\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\vec{b}$$

第 9 講　PART4 確認問題

正六角形 ABCDEF において，対角線 BE と CF の交点を O，辺 DE の中点を M とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを①～⑧のうちから選べ。



1　$\overrightarrow{BE}=$ ア

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\dfrac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

2　$\overrightarrow{CB}=$ イ

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\dfrac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

3　$\overrightarrow{CE}=$ ウ

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\dfrac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

4 $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=$ エ

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

5 $\overrightarrow{\mathrm{CM}}=$ オ

① $2\vec{b}$　② $-2\vec{b}$　③ $\vec{a}-\vec{b}$

④ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}-\vec{b}$　⑥ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

⑦ $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$　⑧ $\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

第 10 講　ベクトルの成分表示，ベクトルの内積

PART1　ベクトルの成分と大きさ

例題

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$　　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

Point Pickup

練習

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(7,\ 1)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

PART2　ベクトルの成分と平行

例題

(1)　$\vec{c}=(3,\ 1)$ と平行な単位ベクトルを成分で表せ。

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}=(5,\ 2)$, $\vec{b}=(x,\ 8)$ が平行になるときの x の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1) $\vec{c}=(2,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分で表せ。

(2) 2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるときの x の値を求めよ。

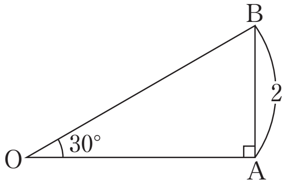
PART3　ベクトルの内積

例題

右の図において，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$

(3)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}$　　(4)　$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OA}$



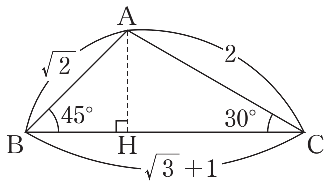
Point Pickup

練習

右の図において，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

(3)　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(4)　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$



PART4　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

例題

(1)　次の 2 つのベクトルの内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(i)　$\vec{a}=(-1,\ 5)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$　　(ii)　$\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような t の値を求めよ。また，$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

第10講　PART1 確認問題

1　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-9,\ 3)$ のとき，

ベクトル $2\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ の成分および大きさを求めよ。

成分　$(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$

大きさ　$\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$

2　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ 4)$ のとき，

ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の成分および大きさを求めよ。

成分　$(-\boxed{\text{オ}}t+\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}t+\boxed{\text{ク}})$

大きさ　$\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}t^2+\boxed{\text{サシ}}t+\boxed{\text{スセ}}}$

第10講　PART2 確認問題

1　$\vec{a}=(3,\ 4)$ と同じ向きの単位ベクトルの成分は，

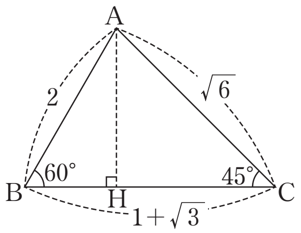
$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\right)$ である。

2　2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ -5)$，$\vec{b}=(-1,\ x)$ について，

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ が平行になるとき，$x=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

第10講　PART3 確認問題

右の図の △ABC において，
次の内積を求めよ。



1　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=$ ［ア］

2　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HA}=$ ［イウ］

3　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AH}=$ ［エ］

4　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{HB}=\sqrt{\boxed{オ}}$

第10講　PART4 確認問題

1 $\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(-3,\ 5)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ アイ である。

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，

$\theta=$ ウエ $^\circ$ である。

2 $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ -6)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になる

ような x の値は，$x=$ オ である。

3 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 4)$，$\vec{x}=(-4,\ t)$ のとき，$\vec{x}+\vec{a}$ と

$\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値は，

$t=$ カキ ，ク である。

第 11 講　内積の性質，位置ベクトル

PART1　内積の性質

例題

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 次の等式を証明せよ。

(i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

PART2　ベクトルの大きさと内積

例題

次の条件を満たす2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

Point Pickup

練習

次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

⑴　$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

⑵　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

PART3　位置ベクトル

例題

3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　辺 AB を 2：1 に内分する点 P　　(2)　辺 AC を 4：1 に外分する点 Q

(3)　△APQ の重心 G

Point Pickup

練習

3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　辺 AC を 1：2 に内分する点 P　　(2)　辺 BC を 2：5 に外分する点 Q

(3)　$\triangle CPQ$ の重心 G

PART4　共線条件

例題

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　3 点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ。

(3)　PQ：QC を求めよ。

Point Pickup

練習

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，辺 BC の中点を M とし，△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ。

第11講　PART1 確認問題

1　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=$ ア

ア は，次の①～④のうちから選べ。

① $|\vec{a}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$

② $|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

③ $|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

④ $|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

2　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=$ イ

イ は，次の①～④のうちから選べ。

① $|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2$

② $|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

④ $|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

3　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，

$3\vec{a}+2\vec{b}$ の大きさは $\sqrt{\text{ウエ}}$ である。

第11講　PART2 確認問題

1 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ア] であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=\dfrac{[イ]}{[ウ]}$ である。

2 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=1$ であり，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-6\vec{b}$ が垂直である。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [エ] であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，$\theta=$ [オカ]$^\circ$ である。

第11講　PART3 確認問題

3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，次の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

1　線分 AB を 3 : 2 に内分する点 $P(\vec{p})$

$$\vec{p}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}$$

2　線分 AC を 7 : 2 に外分する点 $Q(\vec{q})$

$$\vec{q}=-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}$$

3　△APQ の重心 $G(\vec{g})$

$$\vec{g}=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{a}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\vec{b}+\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}\vec{c}$$

第11講　PART4 確認問題

△ABC において，辺 AB を 1：3 に内分する点を P，辺 AC の中点を Q，辺 BC を 3：1 に外分する点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。

1　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{AR}=-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{b}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}$$

である。

2　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}\vec{b}+\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}\vec{b}+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\vec{c}$$

である。

3　3 点 P，Q，R が一直線上にあることを証明する。

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\left(-\vec{b}+\boxed{ナ}\,\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\left(-\vec{b}+\boxed{ネ}\,\vec{c}\right)$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\boxed{ノ}\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

よって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

また，PQ：QR＝$\boxed{ハ}$：$\boxed{ヒ}$ である。

[MEMO]

第 12 講　ベクトルと平面図形

PART1　等式を満たす点の位置

例題

△ABC と点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。

Point Pickup

練習

△ABC と点 P が $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。

PART2　交点の位置ベクトル（係数比較）

例題

△ABC において, 辺 AB を 1:2 に内分する点を D, 辺 AC を 3:2 に内分する点を E とし, 線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

△OAB において，辺 OA を $2:1$ に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

PART3　交点の位置ベクトル（係数の和が 1）

例題

△ABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，辺 CA を 3：2 に内分する点を E とする。

また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，BF：FE，AF：FD を求めよ。

Point Pickup

練習

△ABC において，辺 AB，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ D，E とし，線分 CD と線分 AE の交点を F とする。

(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，DF：FC，AF：FE を求めよ。

PART4　交点の位置ベクトル（三角形の高さ）

例題

AB＝4，AC＝5，$\angle A = 60°$ の $\triangle ABC$ において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

$AB=3$，$AC=2$，$\angle A=120^\circ$ の $\triangle ABC$ において，辺 BC 上に点 H を $AH \perp BC$ となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

第12講　PART1 確認問題

1　平面上の $\triangle \mathrm{ABC}$ と点 P が，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たしている。直線 AP と直線 BC の交点を Q とするとき，

BQ：QC＝［ア］：［イ］

AP：PQ＝［ウ］：［エ］

である。

第12講　PART2 確認問題

1　△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB を 3：2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表す。

AP：PD＝s：$(1-s)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}s\vec{b}$$

BP：PC＝t：$(1-t)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

よって，s，t の値は，$s=\boxed{\text{オ}}$，$t=\boxed{\text{カ}}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}$$ である。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{2}{5}$

④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{4}{9}$　⑥ $\frac{5}{9}$

第12講　PART3 確認問題

△ABC において，辺 BC を 2：1 に内分する点を D，辺 AC の中点を E とする。また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

1　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表すと

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{AC}$$

である。

2　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表すと

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{AC}$$ であり，

$\mathrm{BF}:\mathrm{FE}=\boxed{サ}:\boxed{シ}$，

$\mathrm{AF}:\mathrm{FD}=\boxed{ス}:\boxed{セ}$

である。

第12講　PART4 確認問題

$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AC}=2$，$\angle\mathrm{A}=60°$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を H とする。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表す。

1　内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}=$ ［ア］ である。

2　$\mathrm{BH}:\mathrm{HC}=s:(1-s)$ とする。

$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$ であることから s の値を求めると，$s=\dfrac{［イ］}{［ウ］}$

である。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{［エ］}{［オ］}\vec{b}+\frac{［カ］}{［キ］}\vec{c}$$

である。

第 13 講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式

例題

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(1)　点 $\mathrm{A}(4,\ 3)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行な直線

(2)　2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -5)$ を通る直線

Point Pickup

練習

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(1)　点 A(3, 2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,\ -3)$ に平行な直線

(2)　2 点 A$(-1,\ 0)$，B(0, 2) を通る直線

PART2　法線ベクトルと直線のベクトル方程式

例題

(1)　点 A$(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 A$(0,\ -1)$ から直線 $l:x-3y+2=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　点 A$(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 A$(4,\ 1)$ から直線 $l: 2x-y+3=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

PART3　円のベクトル方程式

例題

平面上の定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し, 次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　　(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

Point Pickup

練習

平面上の異なる 2 つの定点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ と動点 P$(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1) $|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　(2) $|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$

PART4　ベクトルの終点の存在範囲

例題

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$\alpha+2\beta=1$　　　(2)　$\alpha+\beta\leqq\dfrac{1}{2}$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$

Point Pickup

練習

$\triangle$OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$　　(2)　$\alpha+\beta\leqq 2$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

第13講　PART1 確認問題

次の直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

1　点 A$(-1,\ 3)$ を通り，$\vec{d}=(5,\ -2)$ に平行な直線

$$\begin{cases} x=\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\,t \\ y=3-\boxed{\text{エ}}\,t \end{cases}$$

2　2 点 A$(-3,\ 1)$，B$(2,\ -5)$ を通る直線

$$\begin{cases} x=-3+\boxed{\text{オ}}\,t \\ y=\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}\,t \end{cases}$$

第13講　PART2 確認問題

1　点 A(3, 2) を通り，$\vec{n}=(4,\ -5)$ に垂直な直線の方程式は

$\boxed{ア}x-\boxed{イ}y-\boxed{ウ}=0$

である。

2　点 A(0, −3) から，直線 $l：x+2y-4=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。

点 H の座標と線分 AH の長さを求める。

まず，直線 l の法線ベクトルの 1 つは

$\vec{n}=\left(1,\ \boxed{エ}\right)$ であり，$\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$ (k は実数) とおける。

このとき，$k=\boxed{オ}$ であるから，

点 H の座標は $\left(\boxed{カ},\ \boxed{キ}\right)$

$AH=\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$

である。

第 13 講　PART3 確認問題

1　平面上の定点 A$(\vec{a})$ と動点 P$(\vec{p})$ に対し，ベクトル方程式 $|2\vec{p}-\vec{a}|=6$ の表す図形は円であり，この円の中心は $\boxed{\text{ア}}$，半径は $\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ は，次の①～④のうちから選べ。

① 線分 OA の中点
② 線分 OA を 2：1 に内分する点
③ 線分 OA を 1：2 に内分する点
④ 線分 OA を 2：1 に外分する点

2　平面上の異なる 2 つの定点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ と動点 P$(\vec{p})$ に対し，ベクトル方程式 $|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=10$ は，

$$\left|\vec{p}-\frac{\boxed{\text{ウ}}\vec{a}+\boxed{\text{エ}}\vec{b}}{\boxed{\text{オ}}}\right|=\boxed{\text{カ}}$$

と表すことができるので，この方程式の表す図形は，線分 AB を $\boxed{\text{キ}}$：$\boxed{\text{ク}}$ に内分する点を中心とする半径 $\boxed{\text{ケ}}$ の円である。

第13講　PART4 確認問題

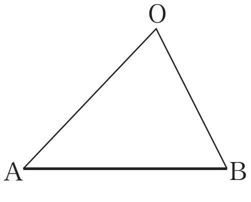
△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする。

実数 α，β が次の条件を満たすとき，点Ｐはそれぞれどのような図形を描くか。

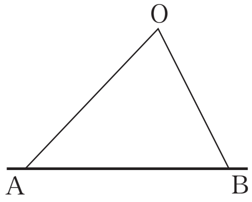
下の①～⑥のうちから選べ。

1　$2\alpha+\beta=1$　［ア］

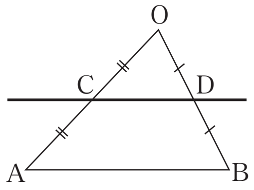
①　線分 AB



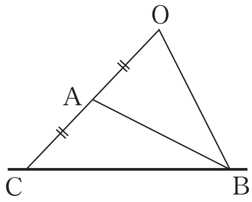
②　直線 AB



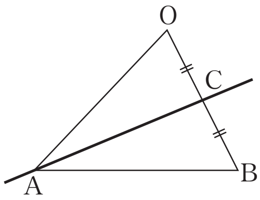
③　直線 CD



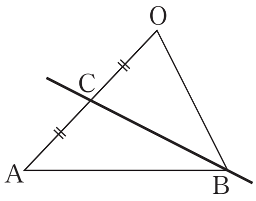
④　直線 CB



⑤　直線 AC

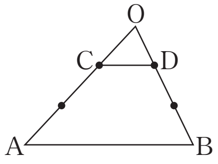


⑥　直線 BC

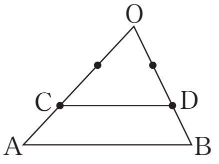


2　$\alpha+\beta \leqq \dfrac{2}{3}$，$\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$　イ

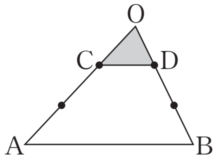
①　線分 CD



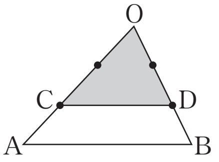
②　線分 CD



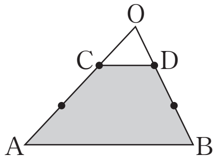
③　△OCD の周および内部



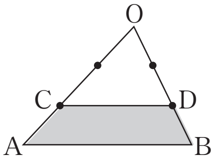
④　△OCDの周および内部



⑤　四角形 CABD の周および内部



⑥　四角形 CABD の周および内部



[MEMO]

第14講　空間ベクトル

PART1　空間の座標

例題

(1)　点 P(1, 2, 3) に対して，次の点の座標を求めよ。

(i)　xy 平面に関して対称な点 A　　(ii)　yz 平面に関して対称な点 B

(iii)　zx 平面に関して対称な点 C　　(iv)　x 軸に関して対称な点 D

(v)　y 軸に関して対称な点 E　　(vi)　z 軸に関して対称な点 F

(vii)　点 (0, −1, 5) に関して対称な点 G

(2)　2 点 A(1, 1, 0)，B(3, −2, 4) の間の距離を求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 点 P$(-2,\ 1,\ -1)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(i) xy 平面に関して対称な点 A　　(ii) z 軸に関して対称な点 B

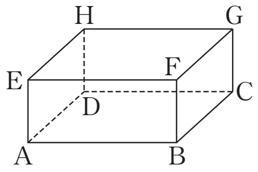
(iii) 点 $(-1,\ 1,\ 0)$ に関して対称な点 C

(2) 2 点 A$(3,\ 2,\ 1)$，B$(1,\ 4,\ -1)$ の間の距離を求めよ。

PART2　空間のベクトル

例題

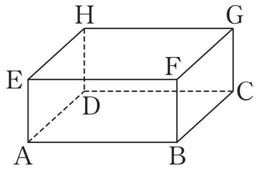
直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。このとき $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



Point Pickup

練習

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



PART3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

例題

(1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

Point Pickup

練習

(1) $\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

PART4　ベクトルの内積

例題

A$(2,\ 1,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 1)$，C$(1,\ 0,\ 2)$ とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

Point Pickup

練習

$\mathrm{A}(2,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,\ 3,\ 6)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$ とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めよ。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

第 14 講　PART1 確認問題

1　点 P(2, 3, 1) と xy 平面に関して対称な点 A の座標は
(ア , イ , ウエ) である。

2　点 P(2, 3, 1) と x 軸に関して対称な点 B の座標は
(オ , カキ , クケ) である。

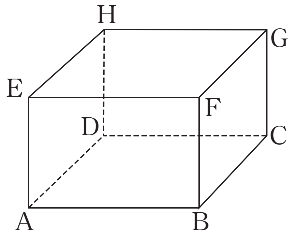
3　点 P(2, 3, 1) と点 (0, 1, 2) に関して対称な点 C の座標は (コサ , シス , セ) である。

4　2 点 A(1, 3, 2), B(0, −1, 4) の間の距離は $\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

第14講　PART2 確認問題

直方体 ABCD－EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，

$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく。



次の［ア］～［エ］は，①～⑥のうちから選べ。

1　$\overrightarrow{AH}=$［ア］

①　$\vec{a}+\vec{c}$　　②　$-\vec{a}+\vec{c}$

③　$\vec{b}+\vec{c}$　　④　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑤　$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　　⑥　$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

2　$\overrightarrow{BE}=$［イ］

①　$\vec{a}+\vec{c}$　　②　$-\vec{a}+\vec{c}$

③　$\vec{b}+\vec{c}$　　④　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑤　$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　　⑥　$-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

3 $\overrightarrow{\mathrm{CE}} =$ [ウ]

① $\vec{a}+\vec{c}$　　② $-\vec{a}+\vec{c}$

③ $\vec{b}+\vec{c}$　　④ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑤ $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　　⑥ $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

4 $\overrightarrow{\mathrm{HB}} =$ [エ]

① $\vec{a}+\vec{c}$　　② $-\vec{a}+\vec{c}$

③ $\vec{b}+\vec{c}$　　④ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑤ $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$　　⑥ $-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

第14講　PART3 確認問題

1　$\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$ のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。

2　$\vec{a}=(1,\ 0,\ -1)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 3)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，

$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}=\left(\boxed{\text{ウエ}},\ \boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カキ}}\right)$ である。

また，$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ の大きさは $\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

3　$\vec{a}=(1,\ 0,\ -1)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 3)$，$\vec{c}=(-1,\ 2,\ 0)$ のとき，

$\vec{p}=(1,\ 8,\ 3)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\vec{p}=\boxed{\text{コ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{サ}}\,\vec{b}+\boxed{\text{シ}}\,\vec{c}$$

である。

第 14 講　PART4 確認問題

3 点 A(1, 2, 0), B(0, 0, 2), C(2, 1, 4) がある。

1 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，

$\theta = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ である。

2 $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

[MEMO]

第15講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル

例題

四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺ADの中点をM，辺CDを1：3に内分する点をN，△ABC の重心をGとするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{MN}$

(2)　$\overrightarrow{NG}$

Point Pickup

練習

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺 OA を 2：1 に内分する点を P，辺 BC の中点を Q，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$

PART2　空間ベクトルの内積と大きさ

例題

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の大きさを求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の値を求めよ。

Point Pickup

練習

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

⑴ $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

⑵ $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ の大きさを求めよ。

⑶ $\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

PART3　共線条件

例題

(1)　空間の 3 点 A(3，2，6)，B(5，−1，4)，C(x，y，0) が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ。

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M，△BDE の重心を N とするとき，3 点 C，N，M は一直線上にあることを示せ。

Point Pickup

練習

(1) 空間の 3 点 A$(a,\ -1,\ 5)$，B$(4,\ b,\ -7)$，C$(5,\ 5,\ -13)$ が一直線上にあるとき，a，b の値を求めよ。

(2) 平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とするとき，3 点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ。

PART4　共面条件

例題

空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ -1)$, $\mathrm{D}(1,\ 2,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

Point Pickup

練習

空間の 4 点 A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5), D(−2, −1, z) が同一平面上にあるとき, z の値を求めよ。

第15講　PART1 確認問題

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。
辺 AB の中点を M，辺 CD を 2：1 に内分する点を N，△BCD の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

1　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=-\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{d}$

2　$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{b}-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{c}-\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\vec{d}$

第15講　PART2 確認問題

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある。辺 AD，BC の中点をそれぞれ M，N とし，線分 MN を 1：2 に内分する点を P とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。

1　$\vec{c}\cdot\vec{d}$ の値を求めると $\vec{c}\cdot\vec{d}=\boxed{\text{ア}}$

2　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{d}$ である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の大きさは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

3　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boxed{\text{サ}}$ である。

第 15 講　PART3 確認問題

1　空間の 3 点 A(1, 3, 0)，B(4, 2, 1)，C(x, y, 2) が一直線上にあるとき，

$x=$ [ア]，$y=$ [イ]

である。

2　平行六面体 ABCD－EFGH において，辺 AE を 2：1 に内分する点を P とし，線分 PC を 2：3 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とすると，

$\overrightarrow{AQ}=$ [ウ]，$\overrightarrow{AG}=$ [エ]

であるから，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{AG}$

よって，3 点 A，Q，G は一直線上にある。

[ウ]，[エ] は次の①～④のうちから選べ。

① $\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$　　② $\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

③ $\dfrac{2}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$　　④ $\dfrac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

第 15 講　PART4 確認問題

1　空間の 4 点 A$(2,\ 0,\ 1)$，B$(0,\ 4,\ 2)$，C$(5,\ -1,\ 3)$，D$(1,\ 7,\ z)$ が同一平面上にあるとき，$z=$ [ア] である。

第 16 講　空間図形の様々な問題，座標空間における図形

PART1　直線と平面の交点

例題

四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 AB を 2：1 に内分する点を P とし，線分 CP を 2：1 に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺 OA, OB の中点をそれぞれ D, E, 辺 OC を 1:2 に内分する点を F とする。3 点 D, E，F を含む平面と線分 OQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。辺 AB の中点を L，辺 AC を 3：2 に内分する点を M，辺 AD を 1：2 に内分する点を N とする。また，三角形 BCD の重心を G とし, 3 点 L, M, N を含む平面と線分 AG の交点を H とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

PART2　直線と平面の垂直

例題

四面体OABCにおいて，$OA=3$，$OB=OC=4$，$\angle BOC=\angle COA=\angle AOB=60°$ である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面ABC上に点Hをとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，s，t，u に成り立つ関係式を求めよ。

(3)　線分OHと平面ABCが垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 O から垂線 OH を下ろしたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

PART3　直線のベクトル方程式

例題

2 点 $A(5,\ -2,\ -3)$, $B(8,\ 0,\ -4)$ を通る直線に, 点 O から垂線 OH を下ろす。このとき, 点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

Point Pickup

練習

2点 $\mathrm{A}(1,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 4,\ -1)$ を通る直線に，点 $\mathrm{C}(1,\ 5,\ -4)$ から垂線 CH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 CH の長さを求めよ。

PART4　座標空間における図形

例題

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と xy 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になるとき，k の値を求めよ。

Point Pickup

練習

2点 A$(1,\ 2,\ 4)$，B$(-5,\ 8,\ -2)$ を直径の両端とする球面を S とする。

⑴　S の方程式を求めよ。

⑵　S と yz 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

⑶　S と平面 $y=k$ の交わりが半径4の円になるとき，k の値を求めよ。

第 16 講　PART1 確認問題

1 四面体 OABC において，辺 OA，OB の中点をそれぞれ D，E とし，AB，CP の中点をそれぞれ P，Q とする。また 3 点 C，D，E を含む平面と線分 OQ の交点を R とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c}$$

である。

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{c}$$

である。

第 16 講　PART2 確認問題

1　四面体 OABC において，OA＝OB＝3，OC＝2，

$\angle AOB = 90^\circ$，$\angle AOC = \angle BOC = 60^\circ$ である。

点 O から平面 ABC に垂線を引き，平面 ABC との交点を

H とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき，

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a} + \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b} + \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{c}$$

である。

第 16 講　PART3 確認問題

1　2 点 A(1, 0, 2)，B(2, 3, 1) を通る直線に，

点 C(4, 5, −2) から垂線 CH を下ろす。

このとき，点 H の座標は (ア , イ , ウ) である。

また，CH ＝ $\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

第 16 講　PART4 確認問題

2 点 A$(0, 1, -1)$，B$(2, -5, 7)$ を直径の両端とする球面を S とする。

1　S の方程式は，

$$\left(x-\boxed{ア}\right)^2+\left(y+\boxed{イ}\right)^2+\left(z-\boxed{ウ}\right)^2=\boxed{エオ}$$

である。

2　S と xy 平面の交わりは円である。

この円の中心の座標は $\left(\boxed{カ}, \boxed{キク}, \boxed{ケ}\right)$ であり，

半径は $\sqrt{\boxed{コサ}}$ である。

3　S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になるとき，

$k=\boxed{シス}, \boxed{セ}$ である。

テキスト　解答

第 9 講　平面上のベクトル

PART1　有向線分とベクトル，ベクトルの相等

例題

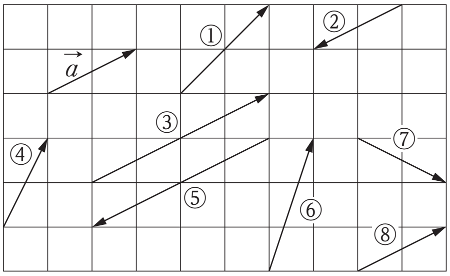
右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。

(1)　$\vec{a}$ と大きさが等しいベクトル

(2)　$\vec{a}$ と向きが等しいベクトル

(3)　$\vec{a}$ と等しいベクトル

(4)　$\vec{a}$ の逆ベクトル



(1)　②，④，⑦，⑧

(2)　③，⑧

(3)　⑧

(4)　②

練習

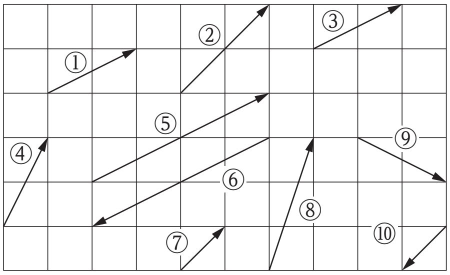
右の図において，次のようなベクトルの組をすべて答えよ。

(1)　大きさが等しいベクトル

(2)　向きが等しいベクトル

(3)　等しいベクトル

(4)　逆ベクトル



(1)　①と③と④と⑨，⑤と⑥，⑦と⑩

(2)　①と③と⑤，②と⑦

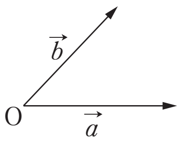
(3)　①と③

(4)　⑤と⑥，⑦と⑩

PART2　ベクトルの加法，減法，実数倍

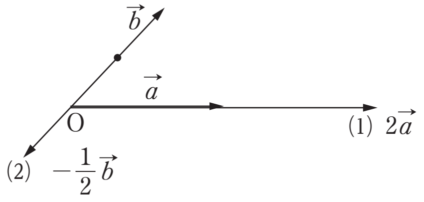
例題

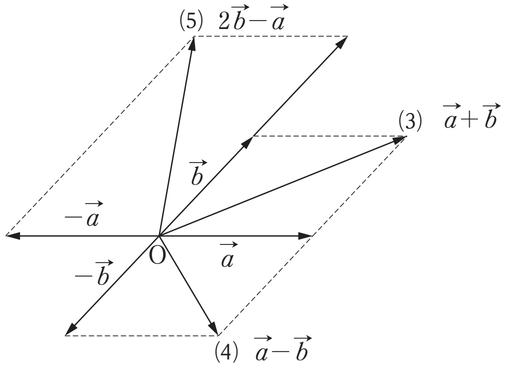
右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを，点 O を始点とする有向線分で図示せよ。



(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

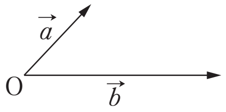
(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$2\vec{b}-\vec{a}$





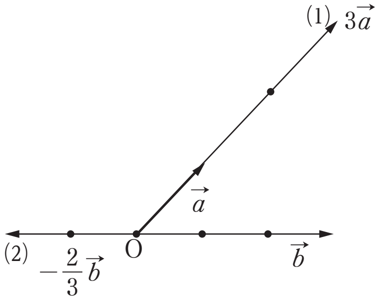
練習

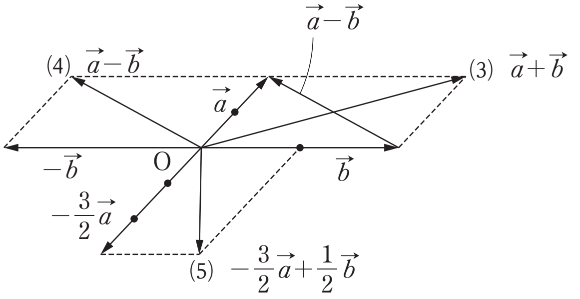
右の図のようにベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを，点Ｏを始点とする有向線分で図示せよ。



(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$-\dfrac{2}{3}\vec{b}$　　(3)　$\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(5)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$



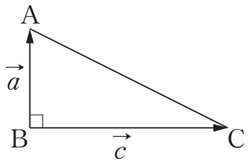


PART3　ベクトルの演算，ベクトルの平行

例題

(1)　等式 $\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$，$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=2$，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(i)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトル

(1)　$\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}$ …… ①，　$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{b}$ …… ②とする。

①＋②より　$3\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$　　よって　$\vec{x}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

このとき，②より　$\vec{y}=-2\vec{x}+\vec{b}=-2\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)+\vec{b}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(2) (i)　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{c}-\vec{a}$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{c}-\vec{a})=-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{a}+\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{c}$$

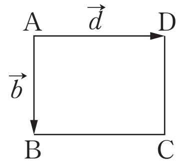
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と反対向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{a}-\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{c}$$

練習

(1)　等式 $5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AD}=4$ の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



(i)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトル

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と平行な単位ベクトル

(1)　$5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}$ …… ①，　$3\vec{x}+5\vec{y}=\vec{b}$ …… ② とする。

①×5＋②×3より　$34\vec{x}=5\vec{a}+3\vec{b}$　　よって　$\vec{x}=\dfrac{5}{34}\vec{a}+\dfrac{3}{34}\vec{b}$

このとき②より　$5\vec{y}=-3\vec{x}+\vec{b}=-3\left(\dfrac{5}{34}\vec{a}+\dfrac{3}{34}\vec{b}\right)+\vec{b}=-\dfrac{15}{34}\vec{a}+\dfrac{25}{34}\vec{b}$

よって　$\vec{y}=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{15}{34}\vec{a}+\dfrac{25}{34}\vec{b}\right)=-\dfrac{3}{34}\vec{a}+\dfrac{5}{34}\vec{b}$

(2) (i)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d}$

また，線分 AC は長方形 ABCD の対角線であることから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{5}(\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}$$

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{d}-\vec{b}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\frac{1}{5}(\vec{d}-\vec{b})=-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と反対向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=-\frac{1}{5}(\vec{d}-\vec{b})=\frac{1}{5}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{d}$$

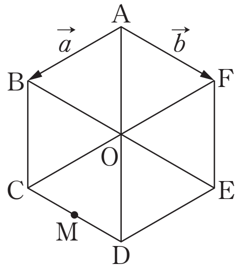
PART4　ベクトルの分解

例題

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 CF の交点を O，辺 CD の中点を M とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{FC}$　　(2)　$\overrightarrow{MC}$　　(3)　$\overrightarrow{AO}$

(4)　$\overrightarrow{AM}$　　(5)　$\overrightarrow{FB}$



(1)　$\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{FO}=2\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$

(2)　$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FA}=\dfrac{1}{2}(-\vec{b})=-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$

(4)　$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})+\dfrac{1}{2}\vec{b}=2\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

(5)　$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=-\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}$

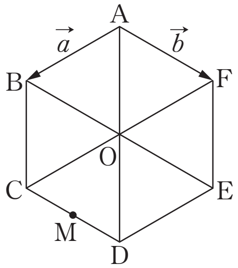
（別解）

$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\vec{a}-\vec{b}$

練習

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，対角線 BE と対角線 CF の交点を O，辺 CD の中点を M とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{OA}$　　(2) $\overrightarrow{MF}$　　(3) $\overrightarrow{BF}$



(1) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})=-2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\vec{a}+\vec{b}$

（別解）

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}$

第 10 講　ベクトルの成分表示，ベクトルの内積

PART1　ベクトルの成分と大きさ

例題

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 6)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$　　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}=3(2,\ 1)-2(-3,\ 6)=(6,\ 3)+(6,\ -12)=(12,\ -9)$

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$

（別解）

$3\vec{a}-2\vec{b}=(12,\ -9)=3(4,\ -3)$　より　$|3\vec{a}-2\vec{b}|=3\sqrt{4^2+(-3)^2}=3\times5=15$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(-3,\ 6)=(-3t+2,\ 6t+1)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(-3t+2)^2+(6t+1)^2}=\sqrt{45t^2+5}$

練習

$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(7,\ 1)$ のとき，次のベクトルを成分で表し，その大きさを求めよ。

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}+t\vec{b}$

(1)　$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=-\dfrac{3}{2}(1,\ 3)+\dfrac{1}{2}(7,\ 1)=\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{9}{2}\right)+\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=(2,\ -4)$

$\left|-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

（別解）

$-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}=(2,\ -4)=2(1,\ -2)$　より　$\left|-\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|=2\sqrt{1^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

(2)　$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3)+t(7,\ 1)=(7t+1,\ t+3)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(7t+1)^2+(t+3)^2}=\sqrt{50t^2+20t+10}$

PART2　ベクトルの成分と平行

例題

(1) $\vec{c}=(3,\ 1)$ と平行な単位ベクトルを成分で表せ。

(2) 2 つのベクトル $\vec{a}=(5,\ 2)$, $\vec{b}=(x,\ 8)$ が平行になるときの x の値を求めよ。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ より，$\vec{c}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{c}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\frac{1}{\sqrt{10}}(3,\ 1)=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

$\vec{c}$ と反対向きのものは

$$-\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=-\frac{1}{\sqrt{10}}(3,\ 1)=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\ -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10},\ -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

(2) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}\parallel\vec{b}$ となるのは，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在するときである。

$(x,\ 8)=k(5,\ 2)$ より　$x=5k,\ 8=2k$

よって　$k=4,\ x=20$

（別解）

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ より　$5\cdot 8-2x=0$　　よって　$x=20$

練習

(1) $\vec{c}=(2,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分で表せ。

(2) 2 つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるときの x の値を求めよ。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ であるから，$\vec{c}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{c}$ と同じ向きのものは

$$\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,\ -3)=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\ -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\ -\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$$

(2) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(-1,\ 2)+3(1,\ x)=(1,\ 3x+4)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(-1,\ 2)-2(1,\ x)=(-3,\ -2x+2)$

$2\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-2\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行となるのは，

$2\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{a}-2\vec{b})$ となる実数 k が存在するときである。

$(1,\ 3x+4)=k(-3,\ -2x+2)$ より

$1=-3k$ …… ①，　　$3x+4=k(-2x+2)$ …… ②

①より　$k=-\dfrac{1}{3}$

このとき②より　$3x+4=-\dfrac{1}{3}(-2x+2)$

よって　$x=-2$

(別解)

$(2\vec{a}+3\vec{b})\mathbin{/\mkern-5mu/}(\vec{a}-2\vec{b})$ より

$1\cdot(-2x+2)=(3x+4)\cdot(-3)$

よって　$x=-2$

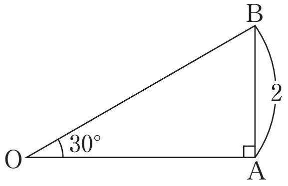
PART3　ベクトルの内積

例題

右の図において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}$　　(4) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OA}$

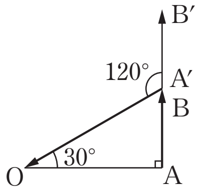


AB $=2$ より OB $=4$，OA $=2\sqrt{3}$

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=2\sqrt{3}\times4\times\cos30^\circ=12$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle BAO=2\times2\sqrt{3}\times\cos90^\circ=0$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BO}|\cos120^\circ=2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$



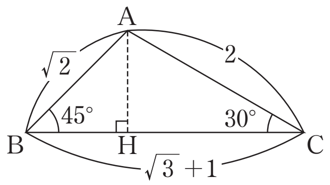
(4) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{OA}|\cos180^\circ=2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times(-1)=-12$

練習

右の図において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}$

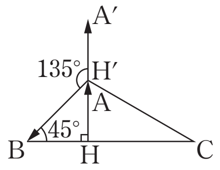
(3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(4) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$



AH＝1，BH＝1，CH＝$\sqrt{3}$ である。

(1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|\cos 60^\circ=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{HA}|\cos 135^\circ=\sqrt{2}\times1\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$



(3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{CH}||\overrightarrow{AH}|\cos 90^\circ=\sqrt{3}\times1\times0=0$

(4) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}=|\overrightarrow{BH}||\overrightarrow{HC}|\cos 0^\circ=1\times\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

PART4　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

例題

(1)　次の２つのベクトルの内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(i)　$\vec{a}=(-1,\ 5),\ \vec{b}=(2,\ 3)$　　(ii)　$\vec{a}=(4,\ 2),\ \vec{b}=(-1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(-6,\ 2),\ \vec{b}=(2,\ x)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値を求めよ。

(1) (i)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times2+5\times3=13$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26},\ |\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=45^\circ$

(ii)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-1)+2\times2=0$

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ より　$\theta=90^\circ$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直になるのは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき

よって　$(-6)\times2+2\times x=0$　より　$x=6$

また

$$\vec{a}+\vec{b}=(-4,\ 2+x),\ \vec{a}-\vec{b}=(-8,\ 2-x)$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ のとき

よって

$$(-4)\times(-8)+(2+x)(2-x)=0\qquad x^2=36\qquad x=\pm6$$

練習

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -\sqrt{3})$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(5,\ 2)$，$\vec{x}=(t-2,\ 4)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるような t の値を求めよ。また，$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるような t の値を求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-\sqrt{3})\times1+1\times(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=150^\circ$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ が垂直になるのは $\vec{a}\cdot\vec{x}=0$ のとき

よって

$2\times(t-2)+(-1)\times4=0$ より　$t=4$

$\vec{x}+\vec{a}=(t,\ 3)$，$\vec{x}-\vec{b}=(t-7,\ 2)$

$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直になるのは　$(\vec{x}+\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ のとき

よって

$t\times(t-7)+3\times2=0$　　$t^2-7t+6=0$　　$(t-1)(t-6)=0$　　$t=1,\ 6$

第 11 講　内積の性質，位置ベクトル

PART1　内積の性質

例題

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ のとき，$2\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(1) (i)　$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}$

(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(iii)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1^2+4\times2+3^2=21$

$|2\vec{a}+\vec{b}|\geqq 0$ より　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{21}$

練習

(1)　次の等式を証明せよ。

(i)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(1) (i)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(ii)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2)　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times2^2-12\times(-2)+9\times3^2=121$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$　より　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{121}=11$

PART2　ベクトルの大きさと内積

例題

次の条件を満たす2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直

(1) $|3\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$　より

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=28 \qquad 9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=28$$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$　より

$$9\times2^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times1^2=28$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

(2) $3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるから

$$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0 \qquad 3|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ より

$$3\times(\sqrt{2})^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times2^2=0$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times2}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=135^\circ$

練習

次の条件を満たす2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$

(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直

(1) $|2\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{19}$ より

$$|2\vec{a}+5\vec{b}|^2=19$$

$$4|\vec{a}|^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25|\vec{b}|^2=19$$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ より

$$4\times4^2+20\vec{a}\cdot\vec{b}+25\times(\sqrt{3})^2=19$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-6}{4\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=150^\circ$

(2) $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+6\vec{b})=0$$

$$|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ より

$$3^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times2^2=0$$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

PART3　位置ベクトル

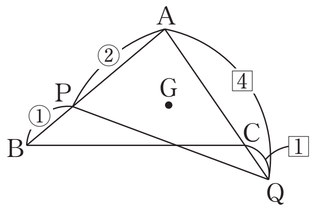
例題

3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$, $\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　辺 AB を $2:1$ に内分する点 P　　(2)　辺 AC を $4:1$ に外分する点 Q

(3)　$\triangle\mathrm{APQ}$ の重心 G

$\mathrm{P}(\vec{p})$, $\mathrm{Q}(\vec{q})$, $\mathrm{G}(\vec{g})$ とする。



(1)　$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{c}}{4-1}=\dfrac{-\vec{a}+4\vec{c}}{3}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{c}$

(3)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{p}+\vec{q}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$

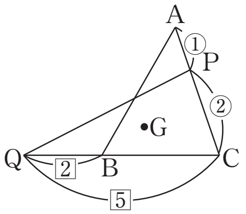
練習

3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　辺ACを1：2に内分する点P　　(2)　辺BCを2：5に外分する点Q

(3)　△CPQの重心G

P$(\vec{p})$，Q$(\vec{q})$，G$(\vec{g})$ とする。



(1)　$\vec{p}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(2)　$\vec{q}=\dfrac{5\vec{b}-2\vec{c}}{-2+5}=\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(3)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{c}+\vec{p}+\vec{q}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{5}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$

PART4　共線条件

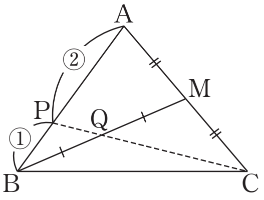
例題

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ。

(3) PQ：QC を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}}{2}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

(2) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)-\dfrac{2}{3}\vec{b}=-\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{12}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{c}-\dfrac{2}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{PQ}$ より，3 点 P，Q，C は一直線上にある。

(3) (2)より　PQ：QC＝1：3

練習

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，辺 BC の中点を M とし，△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

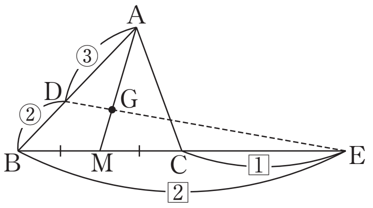
(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$



(2) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\dfrac{3}{5}\vec{b}=-\dfrac{4}{15}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\dfrac{3}{5}\vec{b}=-\dfrac{8}{5}\vec{b}+2\vec{c}=\dfrac{6}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{DE}=6\overrightarrow{DG}$ であるから，3 点 D，G，E は一直線上にある。

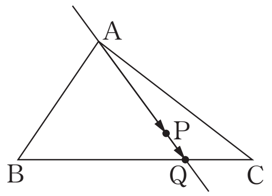
また，DG：GE＝1：5 である。

第12講　ベクトルと平面図形

PART1　等式を満たす点の位置

例題

△ABC と点Pが $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$ を満たす。また，直線APと直線BCの交点をQとする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。



$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}=\frac{7}{9}\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

$\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$ は，点Aを始点とし線分BCを5：2に内分する点の位置ベクトルである。

3点A，P，Qは一直線上にあり，点Qは直線BC上にあることから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$$

であり　BQ：QC＝5：2

また，$\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AQ}$ より　AP：PQ＝7：2

(別解)

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{9}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}k\overrightarrow{AC}$$

点Qは直線BC上の点であるから

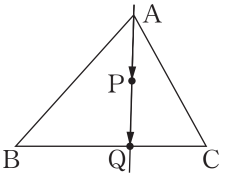
$$\frac{2}{9}k+\frac{5}{9}k=1 \qquad よって \quad k=\frac{9}{7}$$

したがって，$\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{7}\overrightarrow{AP}$ より　AP：PQ＝7：2

また，$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$ より　BQ：QC＝5：2

練習

△ABC と点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす。また，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。このとき，AP：PQ，BQ：QC を求めよ。



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\frac{5}{10}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

$\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は，点 A を始点とし線分 BC を 3：2 に内分する点の位置ベクトルである。

3 点 A，P，Q は一直線上にあり，点 Q は直線 BC 上にあることから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

であり　BQ：QC＝3：2

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より　AP：PQ＝1：1

(別解)

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (k は実数)とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{1}{5}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{10}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

点 Q は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{1}{5}k+\frac{3}{10}k=1 \qquad \text{よって} \quad k=2$$

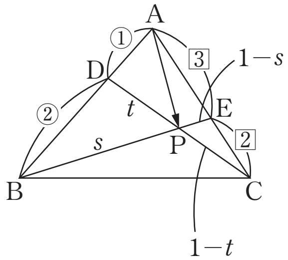
したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　AP：PQ＝1：1

また，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　BQ：QC＝3：2

PART2　交点の位置ベクトル(係数比較)

例題

△ABC において, 辺 AB を 1:2 に内分する点を D, 辺 AC を 3:2 に内分する点を E とし, 線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ として, $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



BP：PE＝s：$(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\times\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}\ \cdots\cdots ①$$

DP：PC＝t：$(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AC}=(1-t)\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\ \cdots\cdots ②$$

①, ②より　$(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}=\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立であるから

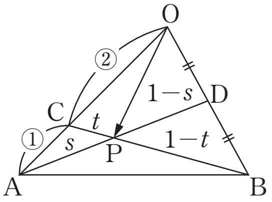
$$1-s=\frac{1}{3}(1-t),\ \ \frac{3}{5}s=t$$

よって　$s=\frac{5}{6}$, $t=\frac{1}{2}$

したがって　$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

練習

△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



AP：PD＝s：$(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\times\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}\ \cdots\cdots ①$$

CP：PB＝t：$(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}=(1-t)\times\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots\cdots ②$$

①，②より　$(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立であるから

$$1-s=\frac{2}{3}(1-t),\ \frac{1}{2}s=t$$

よって　$s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{4}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

PART3　交点の位置ベクトル（係数の和が 1）

例題

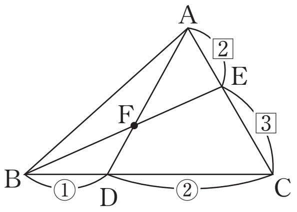
△ABC において，辺 BC を 1：2 に内分する点を D，辺 CA を 3：2 に内分する点を E とする。

また，線分 AD と線分 BE の交点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，BF：FE，AF：FD を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$



(2)　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$（$k$ は実数）…… ① とおくと，$\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AE}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}\ \cdots\cdots\ ②$$

$$=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}k\overrightarrow{AE}\ \cdots\cdots\ ③$$

点 F は線分 BE 上の点であるから

$$\frac{2}{3}k+\frac{5}{6}k=1 \qquad k=\frac{2}{3}$$

よって，②より

$$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$$

また，③より　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{AE}$ であるから

BF：FE＝5：4

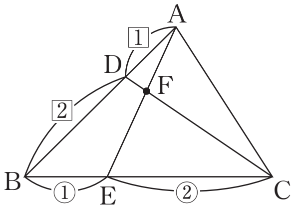
①より $\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ であるから AF：FD＝2：1

練習

△ABC において，辺 AB，BC を 1：2 に内分する点をそれぞれ D，E とし，線分 CD と線分 AE の交点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表し，DF：FC，AF：FE を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(2)　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$（$k$ は実数）…… ①とおくと，　$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$ より

$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}$ …… ②

$=2k\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC}$ …… ③

点 F は線分 CD 上の点であるから　$2k+\frac{1}{3}k=1$　　$k=\frac{3}{7}$

よって，②より　$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

また，③より　$\overrightarrow{AF}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$ であるから　DF：FC＝1：6

①より，$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AE}$ であるから　AF：FE＝3：4

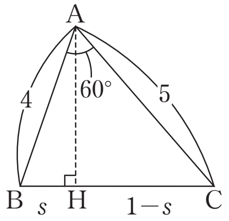
PART4　交点の位置ベクトル(三角形の高さ)

例題

$AB=4$，$AC=5$，$\angle A=60°$ の $\triangle ABC$ において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　(2) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。



(1) $|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=4\times5\times\frac{1}{2}=10$$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$

(2) $BH:HC=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AH}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

$$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$10(1-s)-16(1-s)+25s-10s=0$$

よって　$s=\frac{2}{7}$

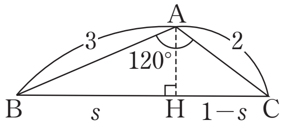
したがって　$\overrightarrow{AH}=\frac{5}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$

練習

AB＝3，AC＝2，∠A＝120° の △ABC において，辺BC上に点Hを AH⊥BC となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　　(2) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。



(1) $|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 120°=3\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$

(2) BH：HC＝s：$(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AH}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

$$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$-3(1-s)-9(1-s)+4s+3s=0$$

よって　$s=\frac{12}{19}$

したがって　$\overrightarrow{AH}=\frac{7}{19}\vec{b}+\frac{12}{19}\vec{c}=\frac{7}{19}\overrightarrow{AB}+\frac{12}{19}\overrightarrow{AC}$

第 13 講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式

例題

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

(1)　点 A$(4,\ 3)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(2,\ 1)$ に平行な直線

(2)　2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ -5)$ を通る直線

(1)　$(x,\ y)=(4,\ 3)+t(2,\ 1)=(2t+4,\ t+3)$

よって　$\begin{cases} x=2t+4 \\ y=t+3 \end{cases}$

(2)　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 1)+t(2,\ -5)=(3t-1,\ -6t+1)$

よって　$\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-6t+1 \end{cases}$

練習

次の直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ。

⑴　点 A(3, 2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(1,\ -3)$ に平行な直線

⑵　2 点 A(−1, 0)，B(0, 2) を通る直線

⑴　$(x,\ y)=(3,\ 2)+t(1,\ -3)=(t+3,\ -3t+2)$

よって $\begin{cases} x=t+3 \\ y=-3t+2 \end{cases}$

⑵　$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 0)+t(0,\ 2)=(t-1,\ 2t)$

よって $\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t \end{cases}$

PART2　法線ベクトルと直線のベクトル方程式

例題

(1)　点 A$(3,\ -4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 A$(0,\ -1)$ から直線 l：$x-3y+2=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

(1)　求める直線上の点を P$(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+4)$ より　$2(x-3)-3(y+4)=0$

よって，求める方程式は $2x-3y-18=0$

(2)　$\vec{n}=(1,\ -3)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 l の法線ベクトルの1つである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\parallel\vec{n}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける。

H$(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s,\ t+1)$ より

$$(s,\ t+1)=k(1,\ -3)$$

よって，$s=k$，$t+1=-3k$ より

$$s=k,\ t=-3k-1 \ \cdots\cdots \ ①$$

また，点 H は直線 l 上の点であるから

$$s-3t+2=0 \ \cdots\cdots \ ②$$

①を②に代入して

$$k-3(-3k-1)+2=0 \qquad k=-\frac{1}{2}$$

このとき①より　$s=-\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$

よって，H の座標は $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ より

$$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

練習

(1)　点 A$(5,\ -1)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2)　点 A$(4,\ 1)$ から直線 l：$2x-y+3=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする。H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めよ。

(1)　求める直線上の点を P$(x,\ y)$ とすると，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-5,\ y+1)$ より　$1\times(x-5)+3\times(y+1)=0$

よって，求める方程式は　$x+3y-2=0$

(2)　$\vec{n}=(2,\ -1)$ とおくと，$\vec{n}$ は直線 l の法線ベクトルの 1 つである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\parallel\vec{n}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）とおける。

H$(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s-4,\ t-1)$ より

$$(s-4,\ t-1)=k(2,\ -1)$$

よって，$s-4=2k$，$t-1=-k$ より

$$s=2k+4,\ t=-k+1 \cdots\cdots ①$$

また，点 H は直線 l 上の点であるから

$$2s-t+3=0 \cdots\cdots ②$$

①を②に代入して

$$2(2k+4)-(-k+1)+3=0 \qquad k=-2$$

このとき①より　$s=0$，$t=3$

よって，H の座標は $(0,\ 3)$

また $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(-4,\ 2)$ より

$$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

PART3　円のベクトル方程式

例題

平面上の定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=1$　　　(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$

(1)　点 A を中心とする半径 1 の円

(2)　$|3\vec{p}-2\vec{a}|=6$ より　　$3\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=6$

すなわち　　$\left|\vec{p}-\dfrac{2}{3}\vec{a}\right|=2$

よって，線分 OA を 2：1 に内分する点を中心とする半径 2 の円

練習

平面上の異なる2つの定点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ と動点 $P(\vec{p})$ に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1) $|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　　(2) $|3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|=5$

(1) $|2\vec{p}-\vec{a}|=3$　より　$2\left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=3$

すなわち　$\left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right|=\dfrac{3}{2}$

よって，線分 OA の中点を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円

(2) $|3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|=5$　より

$|3(\vec{p}-\vec{a})+2(\vec{p}-\vec{b})|=5$

$|5\vec{p}-(3\vec{a}+2\vec{b})|=5$

つまり　$\left|\vec{p}-\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right|=1$

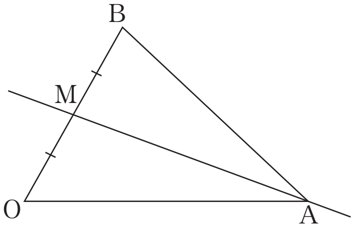
よって，線分 AB を 2：3 に内分する点を中心とする半径 1 の円

PART4　ベクトルの終点の存在範囲

例題

△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$\alpha+2\beta=1$　　(2)　$\alpha+\beta\leqq\frac{1}{2}$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$



(1)　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=\alpha\overrightarrow{OA}+2\beta\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

よって，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$ とすると，点 P の存在範囲は

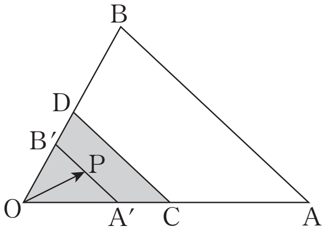
直線 AM である。

(2)　$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

$k=0$ のとき

$\alpha=\beta=0$ であり，点 P は点 O に一致する。

$0<k\leqq\frac{1}{2}$ のとき



$\alpha+\beta=k$ より　$\frac{\alpha}{k}+\frac{\beta}{k}=1$

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{OB})$$

ここで，$\frac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\frac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=\alpha'(k\overrightarrow{OA})+\beta'(k\overrightarrow{OB}),\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq0,\ \beta'\geqq0$$

であるから，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とする点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は，辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とし，k を $0<k\leqq\frac{1}{2}$ の範囲で変化させると，

線分 A′B′ は，点 O を除く △OCD の周および内部を平行に動く。

以上より，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部である。

練習

$\triangle$OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

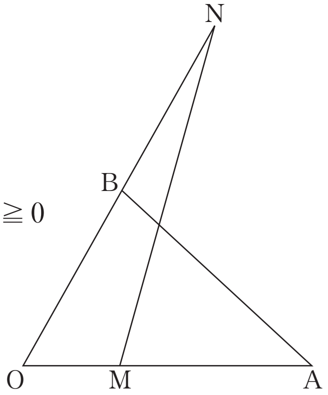
(1)　$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$　　　(2)　$\alpha+\beta\leqq 2$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\alpha\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\dfrac{1}{2}\beta\left(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

よって，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\alpha\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{1}{2}\beta\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}},\ 3\alpha+\frac{1}{2}\beta=1,\ 3\alpha\geqq 0,\ \frac{1}{2}\beta\geqq 0$$

したがって，点 P の存在範囲は線分 MN



(2)　$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0\leqq k\leqq 2$

$k=0$ のとき

　$\alpha=\beta=0$ であり，点 P は点 O に一致する。

$0<k\leqq 2$ のとき

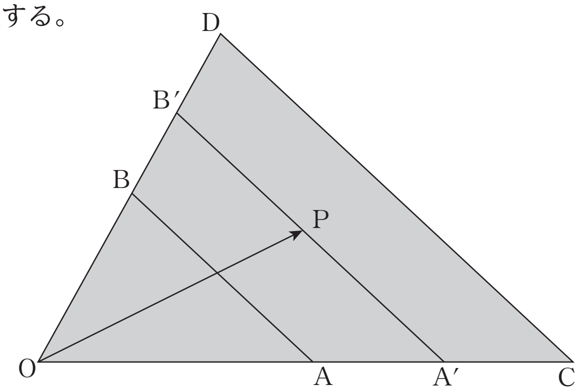
　$\alpha+\beta=k$ より　$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

　ここで，$\dfrac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\dfrac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\beta'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}),\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq 0,\ \beta'\geqq 0$$

　であるから，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とする点 A′, B′ をとると，点 P の存在範囲は，辺 AB に平行な線分 A′B′ である。



ここで，$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，k を $0<k\leqq 2$ の範囲で変化させると，

線分 A′B′ は，点 O を除く $\triangle$OCD の周および内部を平行に動く。

以上より，点 P の存在範囲は，$\triangle$OCD の周および内部

第 14 講　空間ベクトル

PART1　空間の座標

例題

(1)　点 P(1, 2, 3) に対して，次の点の座標を求めよ。

(i)　xy 平面に関して対称な点 A　　(ii)　yz 平面に関して対称な点 B

(iii)　zx 平面に関して対称な点 C　　(iv)　x 軸に関して対称な点 D

(v)　y 軸に関して対称な点 E　　(vi)　z 軸に関して対称な点 F

(vii)　点 (0, −1, 5) に関して対称な点 G

(2)　2 点 A(1, 1, 0)，B(3, −2, 4) の間の距離を求めよ。

(1) (i)　(1, 2, −3)　　(ii)　(−1, 2, 3)　　(iii)　(1, −2, 3)

(iv)　(1, −2, −3)　　(v)　(−1, 2, −3)　　(vi)　(−1, −2, 3)

(vii)　G(x, y, z) とすると

$\dfrac{1+x}{2}=0$，$\dfrac{2+y}{2}=-1$，$\dfrac{3+z}{2}=5$　より　$x=-1$，$y=-4$，$z=7$

したがって　G(−1, −4, 7)

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{29}$

練習

(1)　点 $P(-2,\ 1,\ -1)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(i)　xy 平面に関して対称な点 A　　(ii)　z 軸に関して対称な点 B

(iii)　点 $(-1,\ 1,\ 0)$ に関して対称な点 C

(2)　2 点 $A(3,\ 2,\ 1)$，$B(1,\ 4,\ -1)$ の間の距離を求めよ。

(1) (i)　$(-2,\ 1,\ 1)$　　(ii)　$(2,\ -1,\ -1)$

(iii)　$C(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\frac{-2+x}{2}=-1 \quad \frac{1+y}{2}=1 \quad \frac{-1+z}{2}=0 \quad \text{より} \quad x=0,\ y=1,\ z=1$$

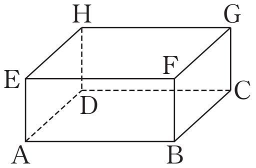
したがって　$C(0,\ 1,\ 1)$

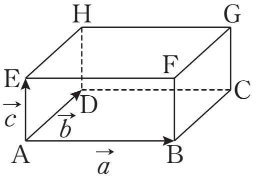
(2)　$AB=\sqrt{(1-3)^2+(4-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

PART2　空間のベクトル

例題

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。このとき $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。





$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\vec{c}$

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}=-\vec{b}-\vec{c}$

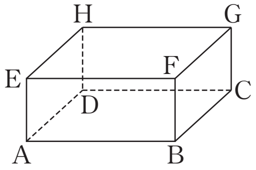
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

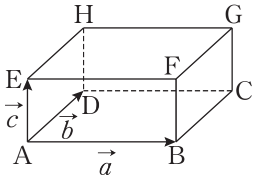
（別解）$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

練習

直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。このとき $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{HC}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{DF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$



$\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}=\vec{a}-\vec{c}$

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

（別解）　$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

（別解）　$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

PART3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

例題

(1) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ -1,\ -2)$ のとき，$|\vec{a}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -2)$，$\vec{c}=(3,\ -2,\ -2)$ のとき，$\vec{p}=(-2,\ 3,\ -2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

$2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ -1,\ 2)-3(0,\ 2,\ 1)+(2,\ -1,\ -2)$

$=(2,\ -2,\ 4)+(0,\ -6,\ -3)+(2,\ -1,\ -2)=(4,\ -9,\ -1)$

$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{4^2+(-9)^2+(-1)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

(2) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-2,\ 3,\ -2)=s(1,\ -2,\ -1)+t(1,\ -1,\ -2)+u(3,\ -2,\ -2)$

$=(s+t+3u,\ -2s-t-2u,\ -s-2t-2u)$

よって

$s+t+3u=-2$ …… ①

$-2s-t-2u=3$ …… ②

$-s-2t-2u=-2$ …… ③

①＋②より　$-s+u=1$ …… ④

①×2＋③より　$s+4u=-6$ …… ⑤

④，⑤より　$s=-2,\ u=-1$　　このとき，①より　$t=3$

したがって　$\vec{p}=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

練習

(1) $\vec{a}=(3,\ 1,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 6,\ 3)$，$\vec{c}=(-2,\ 5,\ 4)$ のとき，$|\vec{c}|$ を求めよ。また，$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}=(0,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，$\vec{c}=(3,\ 4,\ -1)$ のとき，$\vec{p}=(-6,\ 7,\ -3)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形に表せ。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+4^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=2(3,\ 1,\ 4)+(-1,\ 6,\ 3)-3(-2,\ 5,\ 4)$

$=(6,\ 2,\ 8)+(-1,\ 6,\ 3)+(6,\ -15,\ -12)=(11,\ -7,\ -1)$

$|2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|=\sqrt{11^2+(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{171}=3\sqrt{19}$

(2) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと

$(-6,\ 7,\ -3)=s(0,\ 1,\ 1)+t(-1,\ 2,\ -3)+u(3,\ 4,\ -1)$

$=(-t+3u,\ s+2t+4u,\ s-3t-u)$

よって

$-t+3u=-6$ …… ①

$s+2t+4u=7$ …… ②

$s-3t-u=-3$ …… ③

②−③より　$t+u=2$

これと①より　$t=3$，$u=-1$

このとき，②より　$s=5$

したがって　$\vec{p}=5\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

PART4　ベクトルの内積

例題

A(2, 1, 0), B(0, 2, 1), C(1, 0, 2) とするとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角 θ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 1,\ 1)$　より　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC}=(-1,\ -1,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-1)+1\times(-1)+1\times2=3$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$　であるから

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

したがって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

練習

$A(2,\ 1,\ 2)$，$B(4,\ 3,\ 6)$，$C(0,\ 1,\ 0)$ とするとき，2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ のなす角 θ を求めよ。また，$\triangle ABC$ の面積を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ -2)$　より　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2)+2\times0+4\times(-2)=-12$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-12}{2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　であるから

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=150^\circ$

したがって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{3}$

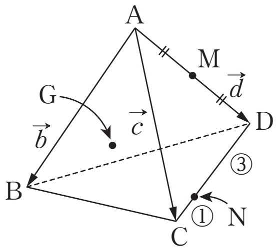
第 15 講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル

例題

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺 AD の中点を M，辺 CD を 1：3 に内分する点を N，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{MN}$　　　(2)　$\overrightarrow{NG}$



$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{3\vec{c}+\vec{d}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

(1)　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{d}$

$$=\frac{3}{4}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}$$

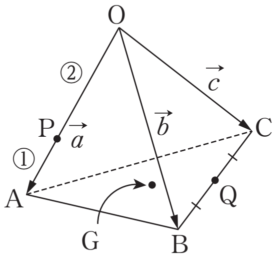
(2)　$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)$

$$=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{5}{12}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}$$

練習

四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 OA を 2：1 に内分する点を P，辺 BC の中点を Q，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$　　　(2)　$\overrightarrow{GQ}$



$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{a}$

$$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　$\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OG}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

PART2　空間ベクトルの内積と大きさ

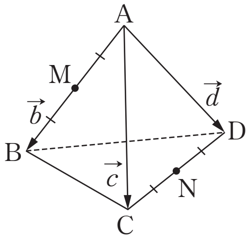
例題

1辺の長さが2の正四面体ABCDがある。辺AB，CDの中点をそれぞれM，Nとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{MN}$ の大きさを求めよ。

(3)　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}$ の値を求めよ。



(1)　$\angle BAC=60°$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$

(2)　(1)と同様に　$\vec{c}\cdot\vec{d}=2$，$\vec{d}\cdot\vec{b}=2$

また，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\\&=\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}\\&=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MN}|^2&=\left|-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}\\&=\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2^2+\frac{1}{4}\times2^2-\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2-\frac{1}{2}\times2=2\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2}$

(3)　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2+\dfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}$

$$=-\frac{1}{2}\times2^2+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{2}\times2=0$$

練習

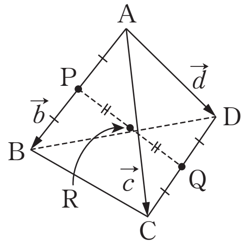
1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{AR}$ の大きさを求めよ。

(3) $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}$ の値を求めよ。

(1) $\angle BAC=60^\circ$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$



(2) (1)と同様に　$\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}$，$\vec{d}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\times\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

$$|\overrightarrow{AR}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right|^2$$

$$=\frac{1}{16}|\vec{b}|^2+\frac{1}{16}|\vec{c}|^2+\frac{1}{16}|\vec{d}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{8}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{16}$$

したがって　$|\overrightarrow{AR}|=\frac{\sqrt{6}}{4}$

(3) $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$$=\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{4}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{4}\times1^2-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=0$$

PART3　共線条件

例題

(1)　空間の３点 A(3, 2, 6), B(5, −1, 4), C(x, y, 0) が一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ。

(2)　平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を M，△BDE の重心を N とするとき，３点 C，N，M は一直線上にあることを示せ。

(1)　３点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

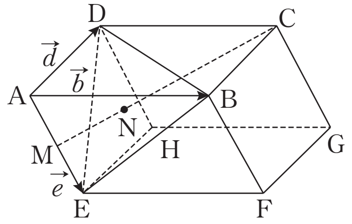
$$\overrightarrow{AB}=(2,\ -3,\ -2),\ \overrightarrow{AC}=(x-3,\ y-2,\ -6)$$

よって　$(x-3,\ y-2,\ -6)=k(2,\ -3,\ -2)$ であるから

$$x-3=2k,\ y-2=-3k,\ -6=-2k \quad \cdots\cdots①$$

①より　$k=3$　　したがって　$x=9$, $y=-7$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。



$$\overrightarrow{AN}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)-(\vec{b}+\vec{d})$$

$$=-\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}$$

$$=\frac{1}{3}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})$$

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{e}-(\vec{b}+\vec{d})=-\vec{b}-\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{e}$$

$$=\frac{1}{2}(-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e})$$

よって，$\overrightarrow{CM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CN}$ であるから，３点 C，N，M は一直線上にある。

練習

(1) 空間の 3 点 $A(a,\ -1,\ 5)$，$B(4,\ b,\ -7)$，$C(5,\ 5,\ -13)$ が一直線上にあるとき，a，b の値を求めよ。

(2) 平行六面体 ABCD-EFGH の辺 AE の中点を P，線分 PC を 1：2 に内分する点を Q とするとき，3 点 A，Q，G は一直線上にあることを示せ。

(1) 3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する。

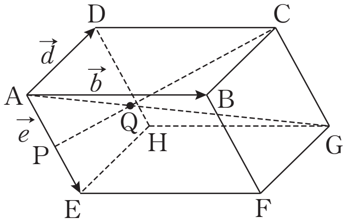
$$\overrightarrow{AB}=(4-a,\ b+1,\ -12),\ \overrightarrow{AC}=(5-a,\ 6,\ -18)$$

よって　$(5-a,\ 6,\ -18)=k(4-a,\ b+1,\ -12)$ であるから

$$5-a=k(4-a),\ 6=k(b+1),\ -18=-12k \ \cdots\cdots ①$$

①より　$k=\dfrac{3}{2}$　　したがって　$a=2,\ b=3$

(2) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とする。



$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{e}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}}{1+2}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{e}+\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}$$

$$=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$$

$$\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$$

よって　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ であるから，3 点 A，Q，G は一直線上にある。

PART4　共面条件

例題

空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{D}(1,\ 2,\ z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ -1)$ より，3 点 A，B，C は一直線上にない。

（解法 1）

点 D が平面 ABC 上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 2,\ z)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たす実数 s，t が存在する。よって

$$(0,\ 2,\ z)=s(-1,\ 2,\ 0)+t(-1,\ 0,\ -1)$$

したがって　$0=-s-t$，$2=2s$，$z=-t$

よって　$s=1$，$t=-1$

したがって $z=1$

（解法 2）

原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad s+t+u=1$$

を満たす実数 s，t，u が存在する。よって

$$(1,\ 2,\ z)=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ -1)$$

したがって　$1=s$，$2=2t$，$z=-u$

また　$s+t+u=1$

よって　$s=1$，$t=1$，$u=-1$

したがって　$z=1$

練習

空間の 4 点 A(3, 1, 2), B(4, 2, 3), C(5, 2, 5), D(−2, −1, z) が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 3)$ より，3 点 A, B, C は一直線上にない。

(解法 1)

点 D が平面 ABC 上にあるとき，$\overrightarrow{AD}=(-5,\ -2,\ z-2)$ に対して

$$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

を満たす実数 s, t が存在する。よって

$$(-5,\ -2,\ z-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$$

したがって　$-5=s+2t$,　　$-2=s+t$,　　$z-2=s+3t$

よって　$s=1$, $t=-3$

したがって　$z=-6$

(解法 2)

原点を O とすると，点 D が平面 ABC 上にあるとき

$$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\quad s+t+u=1$$

を満たす実数 s, t, u が存在する。よって

$$(-2,\ -1,\ z)=s(3,\ 1,\ 2)+t(4,\ 2,\ 3)+u(5,\ 2,\ 5)$$

したがって　$-2=3s+4t+5u$,　　$-1=s+2t+2u$,　　$z=2s+3t+5u$

また　$s+t+u=1$

よって　$s=3$, $t=1$, $u=-3$

したがって　$z=-6$

第16講　空間図形の様々な問題，座標空間における図形

PART1　直線と平面の交点

例題

四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 AB を 2：1 に内分する点を P とし，線分 CP を 2：1 に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

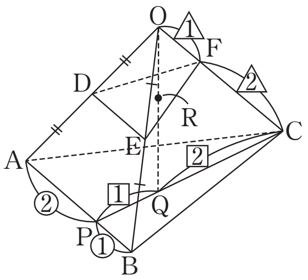
(1)　$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　辺 OA, OB の中点をそれぞれ D, E, 辺 OC を 1:2 に内分する点を F とする。3 点 D, E, F を含む平面と線分 OQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$



(2)　点 R は直線 OQ 上の点であるから $\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$（$k$ は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{OR}=k\left(\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{2}{9}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}$ …… ①

また，点 R は平面 DEF 上の点であるから，実数 s，t，u を用いて

$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OF}$，$s+t+u=1$

と表される。ここで，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{2}s\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}+\dfrac{1}{3}u\vec{c}$ …… ②

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから，①，②より

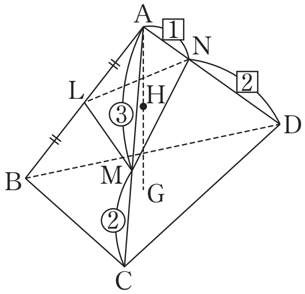
$\dfrac{2}{9}k=\dfrac{1}{2}s$，$\dfrac{4}{9}k=\dfrac{1}{2}t$，$\dfrac{1}{3}k=\dfrac{1}{3}u$　すなわち　$s=\dfrac{4}{9}k$，$t=\dfrac{8}{9}k$，$u=k$

これらと　$s+t+u=1$ より　$\dfrac{4}{9}k+\dfrac{8}{9}k+k=1$　　$k=\dfrac{3}{7}$

したがって，①より　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{2}{21}\vec{a}+\dfrac{4}{21}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$

練習

四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺ABの中点をL，辺ACを3：2に内分する点をM，辺ADを1：2に内分する点をNとする。また，三角形BCDの重心をGとし，3点L, M, Nを含む平面と線分AGの交点をHとする。このとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$$

点Hは直線AG上の点であるから　$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AG}$ (kは実数)と表される。よって

$$\overrightarrow{AH}=k\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)=\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}+\frac{1}{3}k\vec{d} \quad \cdots\cdots ①$$

また，点Hは平面LMN上の点であるから，実数s，t，uを用いて

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AM}+u\overrightarrow{AN},\quad s+t+u=1$$

と表される。ここで，$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\vec{c}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\vec{d}$ であるから

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{3}{5}t\vec{c}+\frac{1}{3}u\vec{d} \quad \cdots\cdots ②$$

4点A，B，C，Dは同一平面上にないから，①，②より

$$\frac{1}{3}k=\frac{1}{2}s,\ \frac{1}{3}k=\frac{3}{5}t,\ \frac{1}{3}k=\frac{1}{3}u \quad \text{すなわち} \quad s=\frac{2}{3}k,\ t=\frac{5}{9}k,\ u=k$$

これらと $s+t+u=1$ より　$\frac{2}{3}k+\frac{5}{9}k+k=1$　　$k=\frac{9}{20}$

したがって，①より　$\overrightarrow{AH}=\frac{3}{20}\vec{b}+\frac{3}{20}\vec{c}+\frac{3}{20}\vec{d}$

PART2　直線と平面の垂直

例題

四面体OABCにおいて，$OA=3$，$OB=OC=4$，$\angle BOC=\angle COA=\angle AOB=60^\circ$ である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面ABC上に点Hをとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，s，t，u に成り立つ関係式を求めよ。

(3) 線分OHと平面ABCが垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

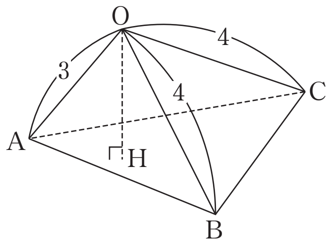
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3\times4\times\dfrac{1}{2}=6,$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=4\times4\times\dfrac{1}{2}=8,$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=4\times3\times\dfrac{1}{2}=6$

(2) 点Hは平面ABC上の点であるから　$s+t+u=1$ …… ①

(3) $OH\perp$ 平面ABCより　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$-3s+10t+2u=0$ …… ②

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{c}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$-3s+2t+10u=0$ …… ③

①，②，③より　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{6}$，$u=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

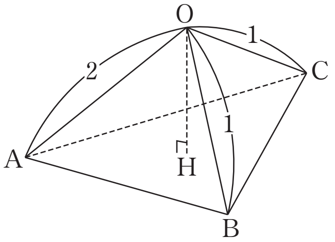
練習

四面体OABCにおいて，OA＝2，OB＝OC＝1，∠AOB＝∠AOC＝60°，∠BOC＝90° である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 O から垂線 OH を下ろしたとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$



$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと，点 H は平面 ABC 上の点より

$s+t+u=1$ …… ①

OH⊥平面 ABC　より　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$3s+u=0$ …… ②

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より $(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{c}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$3s+t=0$ …… ③

①，②，③より　$s=-\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{3}{5}$，$u=\dfrac{3}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

PART3　直線のベクトル方程式

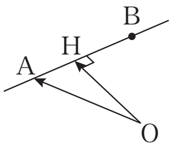
例題

2点 A$(5,\ -2,\ -3)$, B$(8,\ 0,\ -4)$ を通る直線に, 点Oから垂線OHを下ろす。このとき, 点Hの座標と線分OHの長さを求めよ。

点Hは直線AB上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ (t\text{ は実数})$$

と表せる。



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ 2,\ -1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0 \qquad t=-1$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ -4,\ -2)$

点Hの座標は $(2,\ -4,\ -2)$

$$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

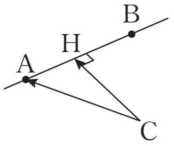
練習

2点 A(1, 3, 0), B(0, 4, −1) を通る直線に，点 C(1, 5, −4) から垂線 CH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 CH の長さを求めよ。

点 H は直線 AB 上にあるから

$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{AB}\ (t\text{ は実数})$$

と表せる。



$\overrightarrow{CA}=(0,\ -2,\ 4)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 1,\ -1)$ であるから

$$\overrightarrow{CH}=(0,\ -2,\ 4)+t(-1,\ 1,\ -1)=(-t,\ -2+t,\ 4-t)$$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ であるから

$$-(-t)+(-2+t)-(4-t)=0 \qquad t=2$$

したがって　$\overrightarrow{CH}=(-2,\ 0,\ 2)$ より

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=(1,\ 5,\ -4)+(-2,\ 0,\ 2)=(-1,\ 5,\ -2)$$

よって，点 H の座標は $(-1,\ 5,\ -2)$

$$\mathrm{CH}=|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

PART4　座標空間における図形

例題

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と xy 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径1の円になるとき，k の値を求めよ。

(1)　球面 S の半径を r とすると

$$r=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{17}$$

よって，球面 S の方程式は　$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=17$

(2)　球面 S が xy 平面，すなわち平面 $z=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2+(0+3)^2=17,\ \ z=0$$

つまり　$(x-1)^2+y^2=8,\ \ z=0$

よって，求める円の中心は点 $(1,\ 0,\ 0)$，半径は　$2\sqrt{2}$

(3)　球面 S が平面 $z=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2+(k+3)^2=17,\ \ z=k$$

つまり　$(x-1)^2+y^2=17-(k+3)^2,\ \ z=k$

半径の条件より　$17-(k+3)^2=1^2$　　$(k+3)^2=16$　　$k+3=\pm 4$

よって　$k=-7,\ 1$

練習

2点 A$(1,\ 2,\ 4)$，B$(-5,\ 8,\ -2)$ を直径の両端とする球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と yz 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $y=k$ の交わりが半径4の円になるとき，k の値を求めよ。

(1)　球面 S の中心は，線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1-5}{2},\ \frac{2+8}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)\ \text{すなわち}\ (-2,\ 5,\ 1)$$

半径は　$\sqrt{(-2-1)^2+(5-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

よって，球面 S の方程式は　$(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$

(2)　球面 S が yz 平面，すなわち平面 $x=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(0+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27,\ x=0$$

つまり　$(y-5)^2+(z-1)^2=23,\ x=0$

よって，求める円の中心は点 $(0,\ 5,\ 1)$，半径は　$\sqrt{23}$

(3)　球面 S が平面 $y=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x+2)^2+(k-5)^2+(z-1)^2=27,\ y=k$$

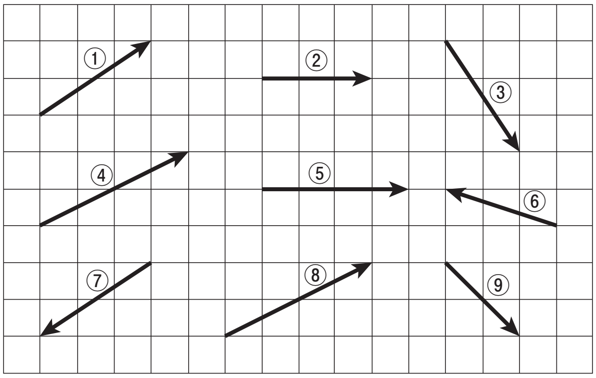
つまり　$(x+2)^2+(z-1)^2=27-(k-5)^2,\ y=k$

半径の条件より　$27-(k-5)^2=4^2$　　$(k-5)^2=11$　　$k-5=\pm\sqrt{11}$

よって　$k=5\pm\sqrt{11}$

確認問題　解答

第９講　PART1 確認問題 解答



1

[正解] ア：③，イ：⑦，ウ：④，エ：⑧

[解説]

大きさが等しいベクトルは，[A]

①と③と⑦，④と⑧

[A]　向きは関係なく，有向線分の長さが等しいものを考える。

2

[正解] オ：⑤，カ：④，キ：⑧

[解説]

向きが等しいベクトルは，[B]

②と⑤，④と⑧

[B]　大きさは関係なく，向きだけを考える。

3

[正解] ク：④，ケ：⑧

[解説]

等しいベクトルは，[C]

④と⑧

[C]　向きが同じで，大きさも等しいベクトル
$\vec{a}=\vec{b}$

4

[正解] コ：①，サ：⑦

[解説]

逆ベクトルは，向きが反対で，大きさが等しいものであるから，[D]

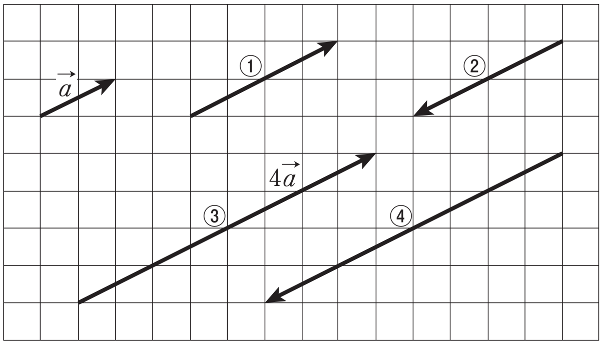
①と⑦

[D]　向きが反対で，大きさが等しいベクトル
$\vec{a}=-\vec{b}$，$\vec{b}=-\vec{a}$

第9講　PART2 確認問題 解答

1 ［正解］ア：③

［解説］

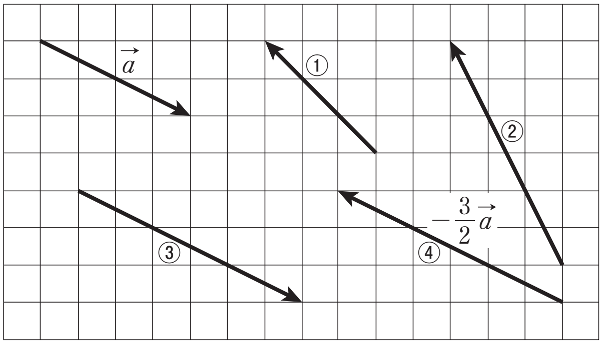


［A］

［A］　$\vec{a} \neq \vec{0}$ とする。
（i）$k>0$ のとき
$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル
（ii）$k<0$ のとき
$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

2 ［正解］イ：④

［解説］

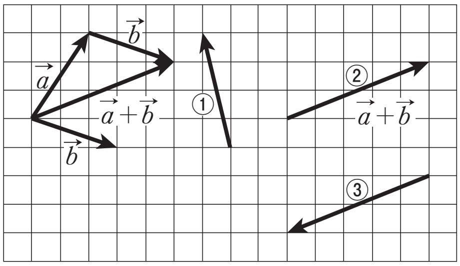


［B］

［B］　$\vec{a} \neq \vec{0}$ とする。
（i）$k>0$ のとき
$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル
（ii）$k<0$ のとき
$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

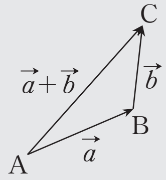
3　[正解] ウ：②

[解説]



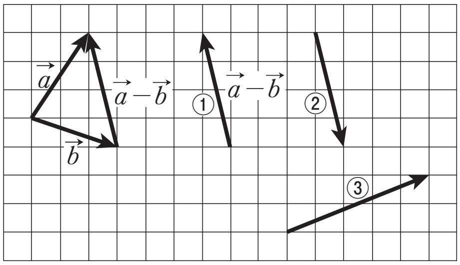
[C]

[C]　$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とすると，
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



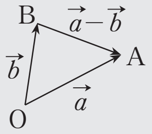
4　[正解] エ：①

[解説]



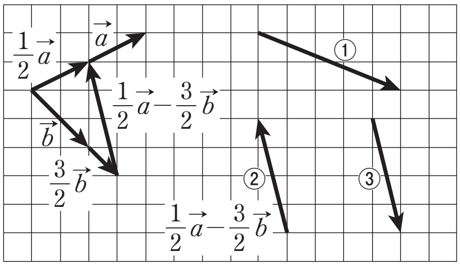
[D]

[D]　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると，
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$



5　[正解] オ：②

[解説]



[E]

[E]　$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ は $\frac{1}{2}\vec{a}$ と $\frac{3}{2}\vec{b}$ を図示し，これらの差を求める。

第 9 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：7，ウ：2，エ：7，オ：3，カ：7，
キ：1，ク：7

[解説]

$$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a} \quad \cdots\cdots ①$$

$$3\vec{x}-\vec{y}=\vec{b} \quad \cdots\cdots ②$$

とする。

① + ②×2 より [A]

$$7\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$$

$$\vec{x}=\mathbf{\frac{1}{7}}\vec{\boldsymbol{a}}+\mathbf{\frac{2}{7}}\vec{\boldsymbol{b}}$$

このとき，②より

$$\vec{y}=3\vec{x}-\vec{b}=3\left(\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}\right)-\vec{b}$$

$$=\mathbf{\frac{3}{7}}\vec{\boldsymbol{a}}-\mathbf{\frac{1}{7}}\vec{\boldsymbol{b}}$$

[A]　ベクトルの演算
ベクトルの性質から，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の式を，文字 a，b の式と同じように扱うことができる。

2

[正解] ケ：1，コ：3

[解説]

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ向きの単位ベクトルは，[B]

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\mathbf{\frac{1}{3}}\vec{\boldsymbol{a}}$$

[B]　単位ベクトルとは，大きさが1のベクトルである。
$\vec{p}$ と同じ向きの単位ベクトルは，

$$\frac{1}{|\vec{p}|}\vec{p}$$

3 **[正解]** サシ：-1，ス：5，セ：1，ソ：5，

タ：1，チ：5，ツ：1，テ：5

[解説]

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

また，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって，$\overrightarrow{AB}$ と平行な単位ベクトルのうち，

$\overrightarrow{AB}$ と同じ向きのものは [C]

$$\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$$

$\overrightarrow{AB}$ と反対の向きのものは

$$-\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}$$

［C］　ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\parallel\vec{p}$ $\iff$

$\vec{p}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

$\vec{a}$ と平行なベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{a}$ を用いて表すことができる。

第 9 講　PART4 確認問題 解答

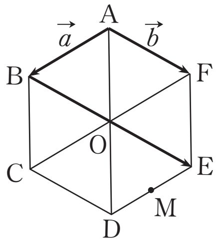
1 [正解] ア：①

[解説]

$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}$

$=2\overrightarrow{AF}$ [A]

$=2\vec{b}$



[A]　四角形 ABOF は平行四辺形だから，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AF}$

2 [正解] イ：⑤

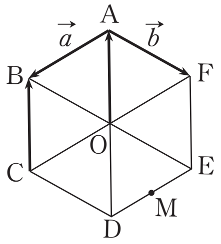
[解説]

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$ [B]

$=-\overrightarrow{AO}$

$=-(\vec{a}+\vec{b})$

$=-\vec{a}-\vec{b}$



[B]　四角形 ABCO は平行四辺形だから，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$

3 [正解] ウ：④

[解説]

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}$ [C]

$=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

$=-\vec{a}+\vec{b}$

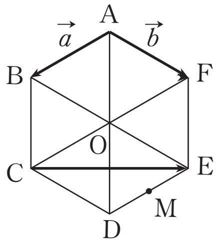
（別解）

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}$ [C]

$=\vec{b}-\vec{a}$

$=-\vec{a}+\vec{b}$



[C]　2つのベクトルの和や差を用いて

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

のようにベクトルを「分割」して表すことができる。

4 ［正解］エ：⑧

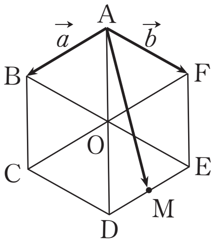
［解説］

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}$ ［D］

$=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

$=2(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(-\vec{a})$

$=\boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}}$



［D］　２つのベクトルの和や差を用いて
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
のようにベクトルを「分割」して表すことができる。

5 ［正解］オ：⑦

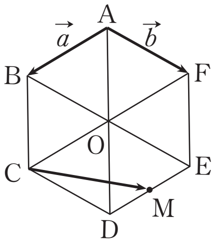
［解説］

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}$ ［E］

$=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

$=\vec{b}+\frac{1}{2}(-\vec{a})$

$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}}$



［E］　２つのベクトルの和や差を用いて
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
のようにベクトルを「分割」して表すことができる。

第10講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：8，イ：4，ウ：4，エ：5

[解説]

$$2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=2(1,\ 3)-\frac{2}{3}(-9,\ 3) \quad \text{[A]}$$

$$=(8,\ 4)$$

$$\left|2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right|=\sqrt{8^2+4^2} \quad \text{[B]}$$

$$=\mathbf{4\sqrt{5}}$$

（別解）

$$2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=(8,\ 4)=4(2,\ 1)$$

これより

$$\left|2a-\frac{2}{3}\vec{b}\right|=4\sqrt{2^2+1^2}=\mathbf{4\sqrt{5}}$$

[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$
$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$　(k は実数)

[B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ において，
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

2

[正解] オ：2，カ：1，キ：4，ク：3，ケコ：20，
サシ：20，スセ：10

[解説]

$$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3)+t(-2,\ 4) \quad \text{[C]}$$

$$=(1-2t,\ 3+4t)$$

$$=(\mathbf{-2t+1,\ 4t+3})$$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(-2t+1)^2+(4t+3)^2} \quad \text{[D]}$$

$$=\sqrt{\mathbf{20t^2+20t+10}}$$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$
$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$（k は実数）

[D]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ において，
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

第10講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：5，ウ：4，エ：5

[解説]

$$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは，

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{1}{5}(3,\ 4)$$ [A]

$$=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

[A]　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは，

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

2 [正解] オ：5，カ：4

[解説]

$\vec{a}+\vec{b}=(4,\ -5)+(-1,\ x)$

$=(3,\ x-5)$

$\vec{a}+2\vec{b}=(4,\ -5)+2(-1,\ x)$

$=(2,\ 2x-5)$

$\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}+2\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ が平行になるのは，

$\vec{a}+2\vec{b}=k(\vec{a}+\vec{b})$ となる実数 k が存在するときである。[B]

$(2,\ 2x-5)=k(3,\ x-5)$ より

$2=3k$ ……①

$2x-5=k(x-5)$ ……②

①より　$k=\dfrac{2}{3}$

このとき，②より　$2x-5=\dfrac{2}{3}(x-5)$

$6x-15=2x-10$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{4}}$

（別解）

$\vec{a}+\vec{b}=(3,\ x-5)$

$\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ 2x-5)$

$(\vec{a}+\vec{b})\parallel(\vec{a}+2\vec{b})$ より

$3\times(2x-5)-(x-5)\times 2=0$ [C]

$6x-15-2x+10=0$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{4}}$

> [B]
> $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff$
> $\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

> [C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，
> $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

第10講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3

[解説]

$\mathrm{BH}=1$，$\mathrm{AH}=\mathrm{CH}=\sqrt{3}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ のなす角は $30°$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|\cos 30°$$ [A]

$$=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3$$

[A]　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2　**[正解]** イウ：-3

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$ のなす角は [B]

$$180°-45°=135°$$

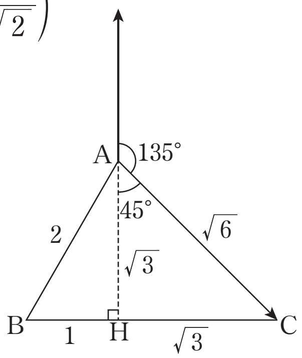
であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{HA}}|\cos 135°$$ [C]

$$=\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-3$$



[B]　2 つのベクトルの始点をそろえてなす角を考える。

[C]　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

3 **[正解]** エ：0

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0$$ [D]

[D]　$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき,
$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

4 **[正解]** オ：3

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ のなす角は $0°$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} = |\overrightarrow{\mathrm{CH}}||\overrightarrow{\mathrm{HB}}|\cos 0° \quad \text{[E]}$$
$$= \sqrt{3} \times 1 \times 1$$
$$= \sqrt{3}$$

[E]　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると,
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

第10講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：17，ウエ：45

[解説]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-3)+4\times5$ [A]

$=\mathbf{17}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ [B]

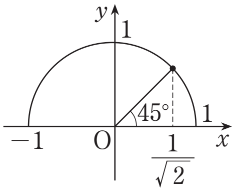
$=\dfrac{17}{\sqrt{1^2+4^2}\sqrt{(-3)^2+5^2}}$

$=\dfrac{17}{\sqrt{17}\sqrt{34}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は

$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$



[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

[B]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，２つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

2

[正解] オ：9

[解説]

$\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ [C]

よって

$2\times x+3\times(-6)=0$

$\boldsymbol{x=9}$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

3 **[正解]** カキ：-1，ク：3

[解説]

$$\vec{x}+\vec{a}=(-4,\ t)+(3,\ 2)$$
$$=(-1,\ t+2)$$
$$\vec{x}-\vec{b}=(-4,\ t)-(1,\ 4)$$
$$=(-5,\ t-4)$$

$\vec{x}+\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直のとき

$$(\vec{x}+\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$$ [D]

よって

$$(-1)\times(-5)+(t+2)(t-4)=0$$
$$t^2-2t-3=0$$
$$(t+1)(t-3)=0$$
$$\boldsymbol{t=-1,\ 3}$$

[D]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$

第11講　PART1 確認問題 解答

1　[正解] ア：③

[解説]

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}$ [A]

$=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=|\boldsymbol{\vec{a}}|^2+\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}}$

[A]　内積の計算は，文字式の展開と同じように行うことができる。

2　[正解] イ：④

[解説]

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$ [B]

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot(2\vec{b})-(2\vec{b})\cdot\vec{a}+(2\vec{b})\cdot(2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=|\boldsymbol{\vec{a}}|^2-4\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}+4|\boldsymbol{\vec{b}}|^2$

[B]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

（k は実数）

3　[正解] ウエ：37

[解説]

$|3\vec{a}+2\vec{b}|^2=(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$ [C]

$=9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9\times1^2+12\times(-3)+4\times4^2$

$=9-36+64$

$=37$

$|3\vec{a}+2\vec{b}|\geqq0$ より，

$|3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{\boldsymbol{37}}$

[C]

$s\vec{a}+t\vec{b}$（s，t は実数）の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について

$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$

のように，２乗すると「内積」として演算を行うことができる。

第11講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：2，ウ：3

[解説]

$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ の両辺を 2 乗すると [A]

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=9$$

$$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9 \quad \text{[B]}$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ より

$$3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times2^2=9$$

$$25-4\vec{a}\cdot\vec{b}=9$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{4}{3\times2}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

[A]　$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ の両辺を 2 乗し，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表す。

[B]
$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$
（s，t は実数）

[C]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

2 [正解] エ：2，オカ：60

[解説]

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-6\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-6\vec{b})=0$$ [D]

$$|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=1$ より

$$4^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6\times1^2=0$$

$$16-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{2}$$

よって

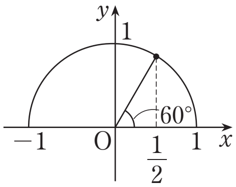
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ [E]

$$=\frac{2}{4\times1}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は

$$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$$



[D]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

[E]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

第 11 講　PART3 確認問題 解答

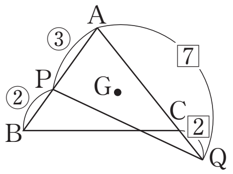
1

[正解] ア：2，イ：5，ウ：3，エ：5

[解説]

線分 AB を 3：2 に内分する点が $P(\vec{p})$ であるから

$$\vec{p}=\frac{2\times\vec{a}+3\times\vec{b}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$$ [A]



[A]　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

2

[正解] オ：2，カ：5，キ：7，ク：5

[解説]

線分 AC を 7：2 に外分する点が $Q(\vec{q})$ であるから

$$\vec{q}=\frac{-2\times\vec{a}+7\times\vec{c}}{7-2}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{7}{5}\vec{c}$$ [B]

[B]　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると，

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

3

[正解] ケ：1，コ：3，サ：1，シ：5，ス：7，
セソ：15

[解説]

$\vec{p}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$，$\vec{q}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{7}{5}\vec{c}$ であり，

点 $G(\vec{g})$ は △APQ の重心であるから，

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{p}+\vec{q}}{3}$$ [C]

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{7}{5}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{7}{5}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{7}{15}\vec{c}$$

[C]　3 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると，

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

第11講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：4，ウ：1，エ：2，オ：1，
カ：2，キ：3，ク：2

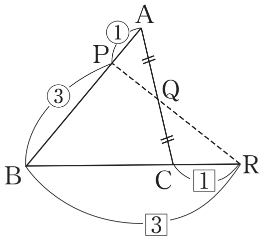
[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-1\times\vec{b}+3\times\vec{c}}{3-1}$ [A]

$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$



[A]　2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると，

$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

2 **[正解]** ケコ：−1，サ：4，シ：1，ス：2，
セソ：−3，タ：4，チ：3，ツ：2

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ [B]

$=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{4}\vec{b}$

$=-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$

[B]　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表す。

3 **[正解]** テ：1，ト：4，ナ：2，ニ：3，ヌ：4，ネ：2，
ノ：3，ハ：1，ヒ：2

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{4}(-\vec{b}+2\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{3}{4}(-\vec{b}+2\vec{c})$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=3\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$ [C]

よって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

また，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ であるから，

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=1:3$$

よって，PQ：QR＝**1：2**

[C]　3 点 P，Q，R が一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を満たす実数 k
が存在する

第12講　PART1 確認問題 解答

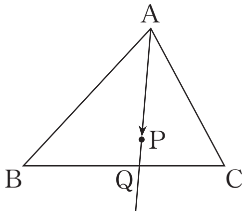
1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウ：5，エ：1

[解説]

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$$



……① [A] [B]

$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ は，点 A を始点とし，線分 BC を 3：2 に内分する点の位置ベクトルである。また，3 点 A，P，Q は一直線上にあり，点 Q は直線 BC 上にあることから

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} \quad ……②$$

となり

BQ：QC＝3：2

①，②より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$$ [C]

よって，AP：AQ＝5：6 であるから，

AP：PQ＝5：1

(別解)

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{k}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$$

点 Q は直線 BC 上の点であるから

$$\frac{k}{3}+\frac{k}{2}=1$$ [D]

$$k=\frac{6}{5}$$

[A]　2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とすると，$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

[B]　3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とするとき，

$$\vec{p}=k\left(\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}\right)$$

（$\frac{n}{m+n}$ と $\frac{m}{m+n}$ の）和が 1

の形の式から，点 P の位置を線分 AB を内分または外分する点を用いて表すことができる。

[C]　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AQ}$ の式で表す。

[D]　点 P が直線 AB 上の点
$\Longleftrightarrow \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$\mathbf{BQ : QC = 3 : 2}$

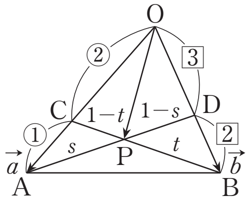
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　$\mathbf{AP : PQ = 5 : 1}$

第12講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：5，ウ：2，エ：3，オ：⑥，

カ：②，キ：4，ク：9，ケ：1，コ：3

[解説]



AP：PD＝s：$(1-s)$ とすると [A]

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$ [B]

$$=\boldsymbol{(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}}\quad\cdots\cdots①$$

BP：PC＝t：$(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$ [B]

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}\quad\cdots\cdots②$$

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，平行でないから，

$$1-s=\frac{2}{3}t,\quad \frac{3}{5}s=1-t$$ [C]

これを解いて　$\boldsymbol{s=\frac{5}{9},\ t=\frac{2}{3}}$

$s=\frac{5}{9}$ を①に代入して，

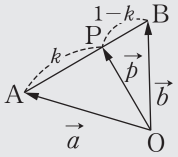
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$$

[A]　AP：PD，BP：PC を文字でおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を２通りの式で表す。

[B]　線分 AB を内分する点 P について，３点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると，

$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ $(0<k<1)$

と表される。



[C]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$

$\Longleftrightarrow s=s'$，$t=t'$

第12講　PART3 確認問題 解答

1

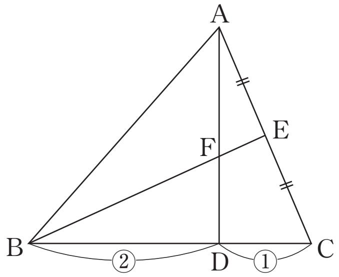
[正解] ア：1，イ：3，ウ：2，エ：3，オ：1，カ：2

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2+1}$$ [A]

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



[A]　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

2 [正解] キ：1，ク：5，ケ：2，コ：5，サ：4，シ：1，ス：3，セ：2

[解説]

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}$（$k$ は実数）……①とおくと，

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots②$$

$$=\frac{1}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}k\overrightarrow{AE}\quad\cdots\cdots③$$

点 F は線分 BE 上の点であるから，

$$\frac{1}{3}k+\frac{4}{3}k=1$$ [B]

$$k=\frac{3}{5}$$

よって，②より　$\mathbf{\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$

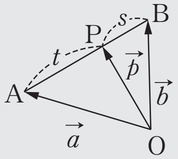
③より　$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AE}$ であるから

BF：FE＝4：1 [B]

①より　$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ であるから

AF：FD＝3：2

[B]　点 P が直線 AB 上の点
$\iff \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$



$0<s<1$，$0<t<1$ のとき，
AP：PB＝t：s

第12講　PART4 確認問題 解答

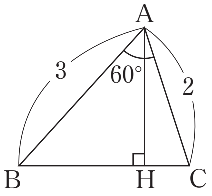
1

[正解] ア：3

[解説]

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°$ [A]

$=3\times2\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}$



[A]　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2

[正解] イ：6，ウ：7，エ：1，オ：7，カ：6，
キ：7

[解説]

BH：HC $=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ [B]

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ である。

よって

$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$3(1-s)-9(1-s)+4s-3s=0$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{6}{7}}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{7}\vec{b}+\dfrac{6}{7}\vec{c}}$

[B]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

第13講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-1，ウ：5，エ：2

[解説]

点 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$ を通り，$\vec{d}=(5,\ -2)$ に平行な直線の方程式は，

$$(x,\ y)=(-1,\ 3)+t(5,\ -2) \quad \text{[A]}$$
$$=(-1+5t,\ 3-2t)$$

すなわち，

$$\begin{cases} x=-1+5t \\ y=3-2t \end{cases}$$

[A]　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式
$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

2 **[正解]** オ：5，カ：1，キ：6

[解説]

2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -5)$ を通る直線の方程式は，

$$(x,\ y)=(1-t)(-3,\ 1)+t(2,\ -5) \quad \text{[B]}$$
$$=(-3+5t,\ 1-6t)$$

すなわち，

$$\begin{cases} x=-3+5t \\ y=1-6t \end{cases}$$

[B]　異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式
$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$
または
$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

第13講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：5，ウ：2

[解説]

求める直線上の任意の点を P$(x,\ y)$ とすると，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ である。 [A]

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y-2)$ より

$$4\times(x-3)-5\times(y-2)=0$$

よって，求める方程式は　$\boldsymbol{4x-5y-2=0}$

[A]　点 A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は，
$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$
（$\vec{n}$ は，この直線の法線ベクトル）

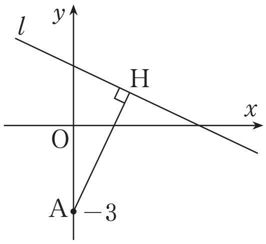
2

[正解] エ：2，オ：2，カ：2，キ：1，ク：2，ケ：5

[解説]

直線 l：$x+2y-4=0$ の法線ベクトルの１つは，

$\boldsymbol{\vec{n}=(1,\ 2)}$ [B]



$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\ /\!/\ \vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}\ （k \text{ は実数}）$$

とおける。

H$(s,\ t)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(s,\ t+3)$ より

$$(s,\ t+3)=k(1,\ 2)$$

よって　$s=k,\ t+3=2k$

すなわち　$s=k$，$t=2k-3$　……①

また，点 H は直線 l 上の点であるから，

$$s+2t-4=0 \quad ……②$$

①を②に代入すると，

$$k+2(2k-3)-4=0$$

$$\boldsymbol{k=2}$$

①より　$s=2$，$t=1$

よって　点 H の座標は $\boldsymbol{(2,\ 1)}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2,\ 4)$ より

$$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{2^2+4^2}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

[B]　直線 $ax+by+c=0$ は，
$\vec{n}=(a,\ b)$ を法線ベクトルにもつ。

第13講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：3

[解説]

$$|2\vec{p}-\vec{a}|=6$$

$$\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=3 \quad \text{[A]}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\vec{a}$ とすると，点 B は線分 OA の中点である。

よって，求める円の中心は**線分 OA の中点**であり，半径は **3** である。

[A]　中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$，半径 r の円のベクトル方程式は，
$|\vec{p}-\vec{c}|=r$

2

[正解] ウ：2，エ：3，オ：5，カ：2，キ：3，ク：2，ケ：2

[解説]

$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=10$　より

$$|2(\vec{p}-\vec{a})+3(\vec{p}-\vec{b})|=10 \quad \text{[B]}$$

$$|5\vec{p}-(2\vec{a}+3\vec{b})|=10$$

$$\left|\vec{p}-\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}\right|=2$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ とすると，点 C は線分 AB を 3：2 に内分する点である。 [C]

よって，求める図形は，

線分 AB を 3：2 に内分する点を中心とする半径 2 の円である。

[B]　方程式を $\vec{p}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表す。

[C]　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

第 13 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥

[解説]

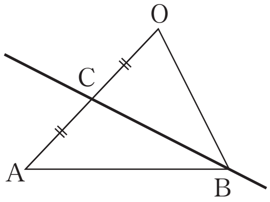
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=2\alpha\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$ [A]

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ 2\alpha+\beta=1\end{cases}$$ [B]

これを満たす点 P の存在範囲は，**直線 BC** である。



[A]　条件が $2\alpha+\beta=1$ だから，係数が 2α と β になるようにする。

[B]　$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ のとき，点 P が直線 AB 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

2 ［正解］イ：④

［解説］

$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0 \leqq k \leqq \dfrac{2}{3}$

$k=0$ のとき，

$\alpha=\beta=0$ であり，点Pは点Oに一致する。

$0<k \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき，

$\alpha+\beta=k$ より，$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$ ［C］

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

ここで，$\dfrac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\dfrac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\beta'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq 0,\ \beta'\geqq 0\end{cases}$$ ［D］

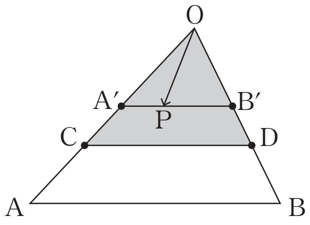
より，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ である点 A′，B′ をとると，点Pの存在範囲は，辺ABに平行な線分 A′B′ である。

ここで，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，k を

$0<k \leqq \dfrac{2}{3}$ の範囲で変化させると，線分 A′B′ は，

点Oを除く △OCD の周および内部を平行に動く。

以上より，点Pの存在範囲は，**△OCD の周および内部**である。



［C］　右辺を1にするため，両辺を k で割る。

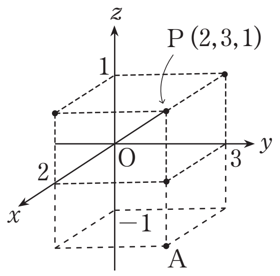
［D］　$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ のとき，
点Pが線分AB上にある
$\iff \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$
点Pが △OAB の周および内部にある
$\iff \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
$s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

第 14 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：3，ウエ：-1

[解説]

点 A は次の図の位置にある。



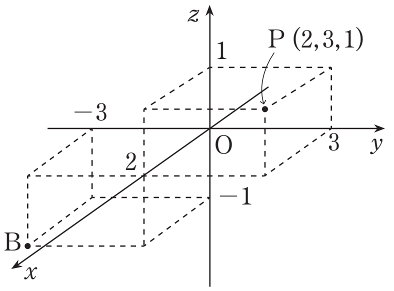
よって，点 A の座標は，**(2，3，−1)** [A]

> [A]　$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と座標平面に関して対称な点の座標
> xy 平面：$(a,\ b,\ -c)$
> yz 平面：$(-a,\ b,\ c)$
> zx 平面：$(a,\ -b,\ c)$

2 **[正解]** オ：2，カキ：-3，クケ：-1

[解説]

点 B は次の図の位置にある。



よって，点 B の座標は，**(2，−3，−1)** [B]

> [B]　$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と座標軸に関して対称な点の座標
> x 軸：$(a,\ -b,\ -c)$
> y 軸：$(-a,\ b,\ -c)$
> z 軸：$(-a,\ -b,\ c)$

3 [正解] コサ：-2，シス：-1，セ：3

[解説]

点 P と点 $(0,\ 1,\ 2)$ に関して対称な点が C であるから，線分 PC の中点が点 $(0,\ 1,\ 2)$ となる。

点 C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\frac{2+x}{2}=0,\quad \frac{3+y}{2}=1,\quad \frac{1+z}{2}=2$$ [C]

$$x=-2,\quad y=-1,\quad z=3$$

よって，点 C の座標は，**$(-2,\ -1,\ 3)$**

> [C]　2 点$(a_1,\ b_1,\ c_1)$，$(a_2,\ b_2,\ c_2)$ を結ぶ線分の中点の座標は，
> $$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2},\ \frac{c_1+c_2}{2}\right)$$

4 [正解] ソタ：21

[解説]

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-3)^2+(4-2)^2}$$ [D]

$$=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{\mathbf{21}}$$

> [D]
> 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離は，
> $$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

第14講　PART2 確認問題 解答

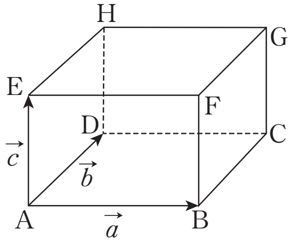
1

[正解] ア：③

[解説]

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$ [A] [B]

$=\vec{b}+\vec{c}$



[A]　2 つのベクトルの和や差を用いて

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

のようにベクトルを分割して表すことができる。

[B]　$\overrightarrow{AH}$ をベクトルの和の形で表す。

2

[正解] イ：②

[解説]

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ [C]

$=-\vec{a}+\vec{c}$

(別解)

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$

$=\vec{c}-\vec{a}$

$=-\vec{a}+\vec{c}$

[C]　$\overrightarrow{BE}$ をベクトルの和の形で表す。

3

[正解] ウ：⑥

[解説]

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

$=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(別解)

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}$ [D]

$=\overrightarrow{AE}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})$

$=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

[D]　$\overrightarrow{CE}$ を始点を A とするベクトルで表す。

4 **[正解]** エ：⑤

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{HG}}+\overrightarrow{\mathrm{GF}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}}$$
$$=\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{c}}$$

（別解）

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$ [E]
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$$
$$=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$$
$$=\vec{\boldsymbol{a}}-\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{c}}$$

[E]　始点を A とするベクトルで表す。

第 14 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：14

[解説]

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}$ [A]

$=\sqrt{14}$

[A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき，
$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

2

[正解] ウエ：-2，オ：2，カキ：-7，クケ：57

[解説]

$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ [B]

$=(1,\ 0,\ -1)-2(0,\ 2,\ 3)+3(-1,\ 2,\ 0)$

$=(1,\ 0,\ -1)+(0,\ -4,\ -6)+(-3,\ 6,\ 0)$

$=\mathbf{(-2,\ 2,\ -7)}$ [C]

よって，$\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ の大きさは，

$|\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-7)^2}$

$=\sqrt{\mathbf{57}}$

[B]　平面ベクトルと同じように計算する。

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，
$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき
$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)$
$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)$
$=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$
$ka_1=k(a_1,\ a_2,\ a_3)$
$=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$　（k は実数）

3 **[正解]** コ：3，サ：2，シ：2

[解説]

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$（$s$，$t$ は実数）とおくと [D]

$$(1,\ 8,\ 3)$$
$$=s(1,\ 0,\ -1)+t(0,\ 2,\ 3)+u(-1,\ 2,\ 0)$$ [E]

つまり

$$(1,\ 8,\ 3)=(s-u,\ 2t+2u,\ -s+3t)$$

よって

$s-u=1$ ……①

$2t+2u=8$ ……②

$-s+3t=3$ ……③

①，②より，$s+t=5$ ……④

③，④より，$s=3$，$t=2$

このとき，①より　$u=2$

よって　$\boldsymbol{\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}}$

[D]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同一平面上にないとき，空間内の任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t，u を用いて
$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$
の形で，ただ 1 通りに表すことができる。

[E]　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおいて，両辺を成分で表す。

第 14 講　PART4 確認問題 解答

1　[正解] アイ：45

[解説]

$$\overrightarrow{AB}=(0-1,\ 0-2,\ 2-0) \quad \text{[A]}$$
$$=(-1,\ -2,\ 2)$$
$$\overrightarrow{AC}=(2-1,\ 1-2,\ 4-0)$$
$$=(1,\ -1,\ 4)$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$
$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times1+(-2)\times(-1)+2\times4 \quad \text{[B]}$$
$$=9$$

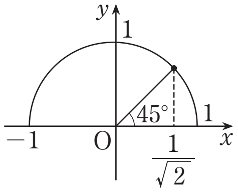
よって，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} \quad \text{[C]}$$
$$=\frac{9}{3\times3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲で

これを満たす θ は，

$$\theta=45^\circ$$



[A]　2 点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

[B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

[C]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

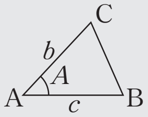
2　[正解] ウ：9，エ：2

[解説]

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin45^\circ \quad \text{[D]}$$
$$=\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{9}{2}$$

[D]　$\triangle ABC$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$



第15講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：1，エ：3，オ：2，カ：3

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\times\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2+1}$$ [A]

$$=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$ [B]

$$=\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}$$

[A]　2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

[B]　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を用いて表す。

2

[正解] キ：1，ク：6，ケ：1，コ：3，サ：1，シ：3

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$ [C]

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

$$=\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{d}$$

[C]　3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ に対し，△ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は，

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

第15講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

$\angle \mathrm{CAD}=60^\circ$ であるから

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos 60^\circ \quad \text{[A]}$$

$$=2\times 2\times\frac{1}{2}=\mathbf{2}$$

[A]　$\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角は，60°

2

[正解] イ：1，ウ：6，エ：1，オ：6，カ：1，

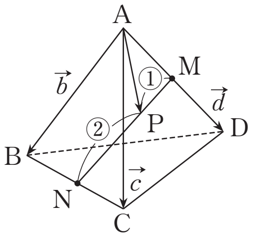
キ：3，クケ：11，コ：3

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\vec{d} \quad \text{[B]}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=2$$



[B]　まず，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表す。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\vec{d}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{\boldsymbol{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{\boldsymbol{c}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{d}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\left|\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right|^2$$

$$=\frac{1}{36}|\vec{b}|^2+\frac{1}{36}|\vec{c}|^2+\frac{1}{9}|\vec{d}|^2+\frac{1}{18}\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$+\frac{1}{9}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{9}\vec{d}\cdot\vec{b} \quad \text{[C]}$$

[C]　$|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2$
$=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2$
$+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}$

$$=\frac{1}{36}\times 2^2+\frac{1}{36}\times 2^2+\frac{1}{9}\times 2^2+\frac{1}{18}\times 2$$

$$+\frac{1}{9}\times 2+\frac{1}{9}\times 2=\frac{11}{9}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\dfrac{\sqrt{\mathbf{11}}}{\mathbf{3}}$

3 [正解] サ：0

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$

$$=-\left(\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)(\vec{b}-\vec{c})$$

$$=-\left(\frac{1}{6}|b|^2-\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{6}\vec{c}\cdot\vec{b}-\frac{1}{6}|\vec{c}\,|^2\right.$$ [D]

$$\left.+\frac{1}{3}\vec{d}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{d}\cdot\vec{c}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{6}\times2^2-\frac{1}{6}\times2+\frac{1}{6}\times2-\frac{1}{6}\times2^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\times2-\frac{1}{3}\times2\right)$$

$$=\mathbf{0}$$

[D]
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}\,|^2$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

第15講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：7，イ：1

[解説]

3点A，B，Cが一直線上にあるとき，

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数kが存在する。**[A]**

$$\overrightarrow{AC}=(x-1,\ y-3,\ 2)$$

$$\overrightarrow{AB}=(3,\ -1,\ 1)$$

よって，$(x-1,\ y-3,\ 2)=k(3,\ -1,\ 1)$

$$\begin{cases} x-1=3k \\ y-3=-k \\ 2=k \quad \cdots\cdots ① \end{cases}$$

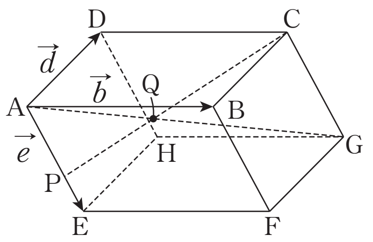
①より　$k=2$

したがって　$\boldsymbol{x=7,\ y=1}$

[A]　3点A，B，Cが一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす
実数kが存在する

2 ［正解］ウ：④，エ：①，オ：2，カ：5

［解説］



$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{e}$$

点 Q は線分 PC を 2：3 に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{3\times\overrightarrow{AP}+2\times\overrightarrow{AC}}{2+3}$$ ［B］

$$=\frac{3}{5}\overrightarrow{AP}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\vec{e}+\frac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d})$$

$$=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{d}+\frac{2}{5}\vec{e}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})} \quad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}} \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$\boldsymbol{\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AG}}$ ［C］

よって，3 点 A，Q，G は一直線上にある。

> ［B］ 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルは，
> $$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

> ［C］ 3 点 A，B，C が一直線上にある
> $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する

第15講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：5

[解説]

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(3,\ -1,\ 2)$ [A]

これより，3点A，B，Cは一直線上にない

(解法1)

$\overrightarrow{AD}=(-1,\ 7,\ z-1)$

点Dが平面ABC上にあるとき，

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t が存在する。 [B]

このとき

$(-1,\ 7,\ z-1)=s(-2,\ 4,\ 1)+t(3,\ -1,\ 2)$

つまり　$-1=-2s+3t$　……①

$7=4s-t$　……②

$z-1=s+2t$　……③

①，②より　$s=2$，$t=1$

したがって，③より　$z=5$

(解法2)

原点をOとすると，点Dが平面ABC上にあるとき

$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$

を満たす実数 s，t，u が存在する。よって

$(1,\ 7,\ z)=s(2,\ 0,\ 1)+t(0,\ 4,\ 2)$
$+u(5,\ -1,\ 3)$ [C]

つまり　$1=2s+5u$　……①

$7=4t-u$　……②

$z=s+2t+3u$　……③

また　$s+t+u=1$　……④

①，②，④より　$s=-2$，$t=2$，$u=1$

したがって，③より　$z=5$

[A]　2点 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，
$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

[B]　一直線上にない3点A，B，Cの定める平面 α について，
点Dが平面 α 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$
となる実数 s，t が存在する

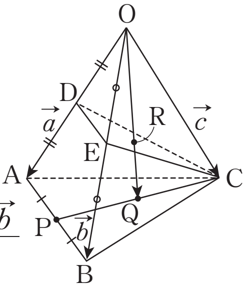
[C]　一直線上にない3点A，B，Cの定める平面 α について，
点Pが平面 α 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$
$s+t+u=1$
を満たす実数 s，t，u が存在する

第 16 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：4，ウ：1，エ：2，オ：1，カ：6，キ：1，ク：6，ケ：1，コ：3

[解説]



$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

点 P は辺 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

点 Q は線分 CP の中点であるから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

点 R は直線 OQ 上の点であるから，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$（$k$ は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{OR}=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$ [A]

$$=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

[A]　3 点 O，R，Q が一直線上にある条件を利用する。

また，点 R は平面 CDE 上の点であるから，実数 s，t，u を用いて

$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OC}$ [B]

$s+t+u=1$

と表される。ここで，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}s\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}+u\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

[B]　同一直線上にない 3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ と点 P$(\vec{p})$ において，
点 P が平面 ABC 上にある
$\iff \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，
$s+t+u=1$

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから，①，②より

$$\frac{1}{4}k=\frac{1}{2}s,\ \frac{1}{4}k=\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{2}k=u$$

すなわち　$s=\frac{1}{2}k,\ t=\frac{1}{2}k,\ u=\frac{1}{2}k$

これらと　$s+t+u=1$ より

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k=1 \qquad k=\frac{2}{3}$$

したがって，①より　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$

第16講　PART2 確認問題 解答

1

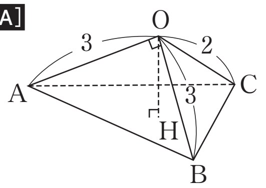
[正解] ア：1，イ：5，ウ：1，エ：5，オ：3，カ：5

[解説]

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60°$ [A]

$=3\times2\times\dfrac{1}{2}=3$



同様に　$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$　（s，t，u は実数）とおくと，

点 H は平面 ABC 上の点だから，

$s+t+u=1$　……①　[B]

OH ⊥ 平面 ABC より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ [C]

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$-9s+9t+3u-3u=0$

$-s+t=0$　……②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$3s-9s+3t+4u-3u=0$

$-6s+3t+u=0$　……③

①，②，③ より [D]

$s=\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{1}{5}$，$u=\dfrac{3}{5}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

[A]　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

[B]　同一直線上にない 3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ と点 P$(\vec{p})$ において，
点 P が平面 ABC 上にある
$\iff \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，
$s+t+u=1$

[C]　OH ⊥（平面 ABC）
$\iff$ OH ⊥ AB かつ OH ⊥ AC

[D]　①，②，③の連立方程式を解く。

第16講　PART3 確認問題 解答

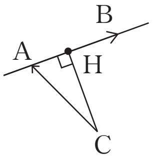
1 **[正解]** ア：3，イ：6，ウ：0，エ：6

[解説]

点 H は直線 AB 上にあるので，

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{AB}$（$t$ は実数） [A]

と表せる。



$\overrightarrow{AB}=(1,\ 3,\ -1)$

$\overrightarrow{CA}=(-3,\ -5,\ 4)$

より

$\overrightarrow{CH}=(-3,\ -5,\ 4)+t(1,\ 3,\ -1)$

$=(-3+t,\ -5+3t,\ 4-t)$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ [B]

$(-3+t)+3(-5+3t)-(4-t)=0$

$11t-22=0$

$t=2$

よって　$\overrightarrow{CH}=(-1,\ 1,\ 2)$

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}$

$=(4,\ 5,\ -2)+(-1,\ 1,\ 2)$

$=(3,\ 6,\ 0)$

よって，点 H の座標は　**(3，6，0)**

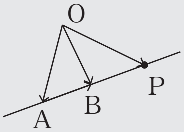
また　$\mathrm{CH}=|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

[A]　点 P が直線 AB 上の点

$\iff \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$（$t$ は実数）

$\overrightarrow{AB}$ を直線 AB の方向ベクトルという。



[B]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，

$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

第16講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：1，イ：2，ウ：3，エオ：26

[解説]

球面 S の中心は，線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1-5}{2},\ \frac{-1+7}{2}\right)$$

すなわち　(1，−2，3)

半径は

$$\sqrt{(0-1)^2+(1+2)^2+(-1-3)^2}$$
$$=\sqrt{1+9+16}$$
$$=\sqrt{26}$$

よって，球面 S の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=26}$$ [A]

[A]　中心が 点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は，
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

2　**[正解]** カ：1，キク：−2，ケ：0，コサ：17

[解説]

球面 S が xy 平面，すなわち $z=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(-3)^2=26$$
$$z=0$$ [B][C]

すなわち　$(x-1)^2+(y+2)^2=17$，$z=0$

よって，中心 **(1，−2，0)**，半径 $\boldsymbol{\sqrt{17}}$ の円を表す。

[B]　点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は
$z=c$

[C]　xy 平面の方程式は，$z=0$。

3 [正解] シス：-2，セ：8

[解説]

球面 S が平面 $z=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(k-3)^2=26,$$

$$z=k$$ [D]

[D]　$z=k$ は，xy 平面に平行な平面の方程式

すなわち

$$(x-1)^2+(y+2)^2=26-(k-3)^2,\ z=k$$

これは，中心 $(1,\ -2,\ k)$，半径 $\sqrt{26-(k-3)^2}$ の円を表す。

半径の条件より，

$$26-(k-3)^2=1^2$$

$$(k-3)^2=25$$

$$k-3=\pm 5$$

よって，$\boldsymbol{k=-2,\ 8}$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。